**Ю. Л. П а в л о в** (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН)**. О предельных распределениях степеней вершин условного конфигурационного графа.**

Рассматривается конфигурационный граф со случайными независимыми одинаково распределенными степенями вершин (см. [1]). Обозначим $\xi$ степень любой из $N$ вершин графа и пусть $p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\} = k^{-\tau} - (k+1)^{-\tau}$, $\tau > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Нетрудно видеть, что $\mathbf{E}\,\xi = \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке $\tau$. Граф строится путем равновероятного соединения между собой различимых «полуребер», выходящих из вершин, а в случае необходимости вводится дополнительная вершина единичной степени. Такие графы широко используются для моделирования сложных сетей коммуникаций, включая Интернет [1], причем типичные значения параметра $\tau$ принадлежат интервалу $(1, 2)$.

Нас интересует подмножество графов, для которых сумма степеней известна и равна $n$. Обозначим $\xi_{(N)}$ и $\mu_r$ максимальную степень вершины и число вершин степени $r$ соответственно. В статьях [2–4] найдены предельные распределения этих характеристик при всех $\tau$ и $N, n \to \infty$ так, что $(n - \zeta(\tau)N)N^{-1/\tau} \leqslant C < \infty$. Кроме того, при $\tau \leqslant 1$ такие распределения найдены для всех возможных случаев изменения $N, n$. Ниже представлены предельные теоремы 1–3, в которых предполагается, что $\tau \in (1, 2)$, $N \to \infty$ и $(n - \zeta(\tau)N)N^{-1/\tau} \to \infty$. Обозначим $u = (k - Np_r)/\sqrt{Np_r(1-p_r)}$.

**Теорема 1.** *Для любого фиксированного $z > 0$*

$$\mathbf{P}\left\{(n - \zeta(\tau)N - \xi_{(N)})N^{-1/\tau} \leqslant z\right\} \to \int_{-\infty}^{z} g(x)\,dx,$$

*где $g(x)$ — плотность устойчивого распределения с показателем $\tau$ и характеристической функцией $\exp\{-|t|^{\tau}\Gamma(1-\tau)(1-(it/|t|)\tan(\pi\tau/2))\cos(\pi\tau/2)\}$, $\Gamma(y)$ — значение гамма-функции в точке $y$.*

**Теорема 2.** *Для фиксированных $r$ равномерно относительно целых неотрицательных $k$, для которых $u$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (2\pi Np_r(1-p_r))^{-1/2} e^{-u^2/2}(1 + o(1)).$$

**Теорема 3.** *При $r \to \infty$ равномерно относительно целых неотрицательных $k$, для которых $u$ лежит в любом фиксированном конечном интервале,*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = (Np_r)^k \left(k!\, e^{Np_r}\right)^{-1}(1 + o(1)).$$

Доказательства этих теорем основаны на использовании обобщенной схемы размещения частиц по ячейкам [5].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Hofstad R.* Random Graphs and Complex Networks. Department of Mathematics and Computer Sciences, Eindhoven University of Thechnology, 2011. (URL: http://www.win.tue.nl/ rhofstad/NotesRGCN.pdf).
2. *Павлов Ю.Л., Чеплюкова И.А.* Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения. — Дискретн. матем., 2008, т. 20, в. 3, с. 3–18.
3. *Павлов Ю. Л.* О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах. — Дискретн. матем., 2009, т. 21, в. 3, с. 14–23.
4. *Павлов Ю.Л.* Об условных интернет-графах, степени вершин которых не имеют математического ожидания. — Дискретн. матем., 2010, т. 22, в. 3, с. 20–33.
5. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М: Физматлит, 2000.