Г. И. Белявский, Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Параллельный алгоритм расчета справедливой цены Американского опциона-колл для модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров.**

Рассмотрим следующую модель:

$$\Delta S_n = S_{n-1}(r_n + \sigma_n \varepsilon_n^*), \quad \Delta B_n = B_{n-1} r_n,$$

где $\varepsilon_n^* \in \{-1, 1\}$, $\mathbf{P}^*\{\varepsilon_n^* = 1\} = \mathbf{P}^*\{\varepsilon_n^* = -1\}$ и $(\varepsilon_n^*)_{n=1}^N$ независимы. Фильтрация $F_n = \sigma(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_n^*)$, $n = 1, 2, \dots, N$, $F_0 = (\Omega, \varnothing)$.

Поставим следующую задачу:

$$\min_{\gamma} \overline{X}_n \quad \text{при ограничениях} \quad \Delta\left(\frac{\overline{X}_n}{B_n}\right) \leqslant \gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right), \quad \overline{X}_n \geqslant f_n, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

где $\overline{X}$ — адаптированный процесс, γ — предсказуемый процесс относительно фильтрации F.

Пусть параметры $\sigma(S_n)$ и $r(S_n)$ имеют следующий вид:

$$\sigma(S_n) = \sum_{i=1}^{N} \overline{\sigma}_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_n < M_i\}} + \overline{\sigma}_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_n \geqslant M_{\widetilde{N}}\}},$$
$$r(S_n) = \sum_{i=1}^{N} \overline{r}_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_n < M_i\}} + \overline{r}_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_n \geqslant M_{\widetilde{N}}\}},$$

где $\overline{r}_i, \overline{\sigma}_i$ $(i = 1, 2, \dots, \widetilde{N}+1)$ постоянны, $0 = M_0 < M_1 < \dots < M_{\widetilde{N}}$ есть последовательность порогов. Назовем полученную модель «моделью с $\widetilde{N}$ порогами».

Теорема. *Пусть* $\overline{X}_N = f_N(S_N) = g_N(S_N)$. *Тогда*

$$\overline{X}_{n-1} = g_{n-1}(S_{n-1}) = \max\Bigg\{ \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2(1+\overline{r}_i)} (g_n(S_{n-1}(1+\overline{r}_i+\overline{\sigma}_i)) + g_n(S_{n-1}(1+\overline{r}_i-\overline{\sigma}_i)))$$
$$\times I_{\{M_{i-1} < S_{n-1} < M_i\}} + \frac{1}{2(1+\overline{r}_{\widetilde{N}+1})} (g_n(S_{n-1}(1+\overline{r}_{\widetilde{N}+1}+\overline{\sigma}_{\widetilde{N}+1}))$$
$$+ g_n(S_{n-1}(1+\overline{r}_{\widetilde{N}+1}-\overline{\sigma}_{\widetilde{N}+1}))) I_{\{S_{n-1} \geqslant M_{n-1}\}}, f_{n-1} \Bigg\}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Пусть $f_n = (S_n - K)^+ = \max\{S_n - K, 0\}$ $(n = 0, 1, \dots, N)$ — Американский опцион-колл. Заметим, что в теореме для нахождения значений приведены рекуррентные формулы на бинарном дереве. Пусть процедура, вычисляющая значение C для заданных S_0, B_0, N называется $FairPrice(S_0, B_0, N)$. Тогда параллельный алгоритм для нахождения значения C имеет следующий вид.

1. Выбрать $l \in \{1, 2, \dots, N-1\}$.
2. $i := 0$.
3. $S[i]; = S_0$, $B[i] := B_0$.
4. $j := 1$.
5. $r := \sum_{k=1}^{N} \overline{r}_k I_{\{M_{k-1} \leqslant S[i] < M_k\}} + \overline{r}_{\widetilde{N}+1} I_{\{S[i] \geqslant M_{\widetilde{N}}\}}$,
   $\sigma := \sum_{k=1}^{N} \overline{\sigma}_k I_{\{M_{k-1} \leqslant S[i] < M_k\}} + \overline{\sigma}_{\widetilde{N}+1} I_{\{S[i] \geqslant M_{\widetilde{N}}\}}$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{если massiv}[j] = 1, \\ 0, & \text{если massiv}[j] = 0, \end{cases} \quad S[i] := S[i](1+r+\sigma\varepsilon^*), \quad B[i] = B[i](1+r), \quad j := j+1.$$

6. Если $j \leqslant l$, то 5.

7. $f[i] = FairPrice(S[i], B[i], N - l)$, $i := i + 1$.
8. Если $i \leqslant 2^{l-1}$, то 3.
9. $C := FairPrice(S_n, B_n, l)$.

Заметим, что в п. 7 в массив f записываются новые значения финансового обязательства, которые будут использованы при реализации п. 9. В силу того, что обработка поддеревьев производится независимо, можно заключить, что рассматриваемый цикл DO является циклом PARDO [2, с. 374], т. е. более эффективного, чем приведенный алгоритм, не существует.

Рассмотрим пример. Пусть начальные данные имеют вид: $S_0 = 6$, $B_0 = 1$, $K = 3$, $\widetilde{N} = 7$, $N = 19$, $\overline{r}_i = 0,3 + (i-1)0,01$, $\overline{\sigma}_i = 0,1 + (i-1)0,001$, $i = 1, 2, \ldots, N+1$. Тогда в результате выполнения параллельного алгоритма получаем, что $C = 4$, время выполнения — 1 секунда. При этом если значение C вычислять без использования параллельного алгоритма, то время выполнения составит 3 секунды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 2004, т. 1,2.
2. *Воеводин В. В.*, *Воеводин Вл. В.* Параллельные вычисления. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002.
3. *Дейтел Х. М.*, *Дейтел П. Дж.* Как программировать на С++. М.: Бином, 2005.
4. *Leisen D. P. J.* Pricing the American put option: a detailed convergence analysis for binomial models. — J. Econ. Dyn. Control., 1998, v. 22, p. 1419–1444.