Ю. Н. Г о р е л о в (Самара, ИПУСС РАН). **Синтез нуль-финитного оптимального управления для двойного интегратора с присоединенным осциллятором методом моментов.**

Рассматривается задача оптимального управления двойным интегратором с присоединенным осциллятором, в рамках которой синтезируется управление обобщенным маневром переориентации упругого космического аппарата (КА) по одному из каналов управления. Отыскивается нуль-финитное управление [1] по доминирующей моде упругих колебаний КА.

Модель двойного интегратора представляется системой

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{1}$$

где u — управляющий параметр, а модель присоединенного осциллятора представлена уравнением

$$\ddot{y} + b\dot{y} + \omega^2 y = u, \tag{2}$$

где $b > 0$ и $\omega^2 > 0$ — такие заданные параметры, что $\omega^2 > (b/2)^2$.

Маневр определяется следующими граничными условиями для системы (1):

$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_1(T) = x_{1f}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_2(T) = x_{2f}, \tag{3}$$

где T — его заданная длительность, а $x_{10}, x_{1f}, x_{20}, x_{2f}$ — параметры маневра, причем в общем случае $x_{10} \neq x_{1f}$; если же $x_{10} = x_{1f}$, то при $x_{20} \neq x_{2f}$ имеет место маневр «перезакрутки» КА. Без ограничения общности можно принять $x_{10} = 0$, а $x_{1f} = \gamma_f$ — требуемый угол поворота КА за время маневра; если при этом $x_{20} = x_{2f} = 0$, то имеет место переориентация КА, иначе — обобщенный маневр переориентации. Для осциллятора предполагается, что в начальный момент он находится в состоянии покоя:

$$y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \tag{4}$$

а при завершении маневра в общем случае $y(T) = y_f$, $\dot{y}(T) = \dot{y}_f$, где y_f и $\dot{y}_f$ — некоторые значения, определяемые заданной программой управления $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$. Если для нее выполняются также следующие условия:

$$y(T) = y_f = 0, \quad \dot{y}(T) = \dot{y}_f = 0, \tag{5}$$

то такое управление называется *нуль-финитным* (здесь по части переменных состояния системы (1), (2) или, что то же самое, по упругим колебаниям КА) [1] или «самогасящимся» [2] при переориентации КА. Соответственно, условия (5) — условия нуль-финитности искомого оптимального управления.

Для заданной программы управления решение системы (1) с учетом (3) имеет следующий вид:

$$x_1(\tau) = x_{10} + \tau x_{20} + \int_0^\tau (\tau - \xi) u(\xi)\, d\xi, \quad x_2(\tau) = x_{20} + \int_0^\tau u(\xi)\, d\xi, \tag{6}$$

а частное (вынужденное) решение уравнения (2) с учетом (4):

$$y(\tau) = \frac{1}{\beta} \int_0^\tau e^{\alpha(\tau-\xi)} u(\xi) \sin\beta(\tau - \xi)\, d\xi, \tag{7}$$

где $\alpha = -b/2$, $\beta = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$.

С учетом (6), (7) двухточечная граничная задача (1)–(5) сводится к проблеме моментов в $L_p[0, T]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ [3]: найти линейный функционал $\varphi \in L_p*$, для которого выполняются моментные равенства

$$\varphi(h_k) = c_k, \qquad k = 1, 2, 3, 4. \tag{8}$$

Здесь $h_k(\cdot) \in L_p[0,T]$ и с учетом (6), (7)

$$\begin{aligned} &h_1(\xi) = T - \xi, \quad h_2(\xi) = 1, \quad h_3(\xi) = \beta^{-1} e^{\alpha(T-\xi)} \sin\beta(T-\xi), \\ &h_4(\xi) = e^{\alpha(T-\xi)}[\alpha\beta^{-1}\sin\beta(T-\xi) + \cos\beta(T-\xi)], \end{aligned} \tag{9}$$

и, соответственно, $c_1 = x_{1f} - x_{10} - T x_{20}$, $c_2 = x_{2f} - x_{20}$, $c_3 = \beta y(T)$, $c_4 = \dot{y}(T)$. Дополнительно можно потребовать, чтобы при этом еще минимизировались функционалы типа нормы для $u(\cdot) \in L_q[0,T]$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ $(1/p + 1/q = 1)$ [3], [4]:

$$J(u(\cdot)) = \|u(\cdot)\|_{L_q} \to \min\,. \tag{10}$$

В силу существования изометрического изоморфизма $L_p^*[t_0,t_f] \to L_q[t_0,t_f]$, для разрешающего проблему моментов (8) оптимального функционала φ_0 имеет место (см. [3], [4]) $\|\varphi_0\|_{L_p^*} = \min_{u(\cdot)} \|u(\cdot)\|_{L_q} = 1/\rho_0$, где $\rho_0 = \|h_0(\cdot)\|_{L_p} \leqslant \|h(\cdot)\|_{L_p}$ $\forall\, h(\cdot) \in P = \{h(\cdot) = \sum_{k=1}^4 l_k h_k(\cdot),\, \sum_{k=1}^4 l_k c_k = 1\}$, а h_0 — минимальный элемент.

Проблема моментов (8) разрешима тогда и только тогда, когда $\rho_0 > 0$ [3], [4]. В рассматриваемой здесь задаче управления достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^4 c_k^2 > 0$ (условие нетривиальности маневра), а функции (9) должны быть линейно независимыми на интервале управления $[0,T]$, что имеет место, когда матрица Грама $G = G(T) = [\int_0^T h_i(\tau) h_j(\tau)\, d\tau]$ невырожденна. Если далее принять $G = [H_{nm}]_{n,m=1,2}$ $(H_{nm} \in \mathbf{R}^{2\times 2})$, то по формулам Шура имеем $\det G = \det H_{11} \det \widetilde{H}_{22}$, где $\det H_{11}(T) = T^4/12$, $\widetilde{H}_{22} = [H_{22} - H_{21} H_{11}^{-1} H_{12}]$. Таким образом, оптимальное управление существует, если $\det[H_{22}(T) - H_{21}(T) H_{11}^{-1}(T) H_{12}(T)] \neq 0$, и если это условие выполнено, то оптимальное управление $u_0(\tau)$ $(\tau \in [0,T])$ в задаче (1)–(5), (10) в соответствии с принципом максимума Н. Н. Красовского [4] определяется при последовательном решении следующих задач [3], [4]. А именно, вначале необходимо решить задачу

$$\min_{l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 + l_4 c_4 = 1} \Big\| \sum_{k=1}^4 l_k h_k(\cdot) \Big\|_{L_p} = \|h_0(\cdot)\|_{L_p} = \rho_0, \tag{11}$$

а затем для полученных ρ_0 и $h_0(\cdot)$ — задачу

$$\max_{\|u(\cdot)\|_{L_q} = \rho_0^{-1}} \int_0^T h_0(\tau) u(\tau)\, d\tau = \int_0^T h_0(\tau) u_0(\tau)\, d\tau = 1. \tag{12}$$

В зависимости от значений q можно рассматривать различные задачи оптимального управления (1)–(5), (10). Если $p = q = 2$, то (1)–(5), (10) есть задача на минимум энергии управления. С учетом (5), (9) из решения задачи (11) следует $\rho_0 = \sqrt{\mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c}}$, где $\mathbf{c} = \mathrm{col}(c_1, c_2, 0, 0)$, а из решения (12) тогда получим $u_0(\tau) = \sum_{k=1}^2 c_k \sum_{l=1}^4 \widetilde{g}_{kl} h_l(\tau)$, где $[\widetilde{g}_{kl}]_{4\times 4} = \mathbf{G}^{-1}$.

Если в (11) положить $p = 1$, то (1)–(5), (10) — задача на минимум функционала $\|u(\cdot)\|_{L_\infty} = \mathrm{vrai}\,\max_{\tau\in[0,T]} |u(\tau)|$, или на минимум максимального значения модуля управляющего параметра, и здесь получим $u_0(\tau) = \rho_0^{-1} \mathrm{sign}\, h_0(\tau)$. В случае $p = \infty$, соответственно, получим задачу на минимум расходов управления с функционалом $\|u(\cdot)\|_{L_1} = \int_0^T |u(\tau)|\, d\tau$. Здесь дополнительно следует ввести ограничение для управления: $|u(\tau)| \leqslant m_0 < \infty$ $\forall\, \tau \in [0,T]$, иначе оптимальное управление будет δ-импульсным. Тогда получим $u_0(\tau) = m_0 \psi_0(\tau)\, \mathrm{sign}\, h_0(\tau)$, где $\psi_0(\tau) = 1$ при $|h_0(\tau)| \geqslant h^*$, либо $\psi_0(\tau) = 0$ при $|h_0(\tau)| < h^*$, $0 < h^* < \infty$, $\int_0^T \psi_0(\tau)\, d\tau = \sigma T$, σ — скважность $u_0(\tau)$.

При решении этих задач определение ρ_0 в явном виде невозможно, но тем не менее не представляет затруднений, так как существуют эффективные вычислительные процедуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Синяков А. Н.* Системы управления упругими подвижными объектами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981, 200 с.
2. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975, 476 с.
3. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением: линейные системы. М.: Наука, 1965, 476 с.
4. *Мороз А. И.* Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987, 304 с.