Г. И. И в ч е н к о, **М. В. С о б о л е в а** (Москва, МИЭМ). **Параметрическая модель случайных подстановок и конгруэнтные циклы.**

Рассматривается множество $S_n = \{s\}$ подстановок n-й степени, т. е. совокупность всех $n!$ взаимно однозначных отображений множества $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя. Пусть задано некоторое разбиение

$$X_n = \bigcup_{j=1}^{d} A_j, \quad A_j \bigcap A_k = \varnothing, \quad j \neq k, \quad d \geqslant 2. \tag{1}$$

Циклы подстановки $s \in S_n$, длины которых являются элементами подмножества A_j, мы называем A_j-*циклами*, а их общее число обозначаем $C_{A_j}(n)$: $C_{A_j}(n) = \sum_{i \in A_j} c_i$, где c_i есть число циклов длины i подстановки s.

Введем далее на множестве S_n вероятностную меру P_θ, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$, $\theta_\bullet \geqslant 0$, в соответствии с которой произвольная подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\prod_{j=1}^{d} \theta_j^{C_{A_j}(n)}$:

$$P_\theta(s) = I\biggl(\sum_{i=1}^{n} i c_i = n\biggr) \prod_{j=1}^{d} \theta_j^{C_{A_j}(n)} \Big/ H_n(\theta). \tag{2}$$

Здесь $I(\cdot\,)$ — индикатор, $H_n(\theta)$ — необходимый нормирующий множитель, имеющий вид

$$H_n(\theta) = n! \operatorname{coef}_{z^n} \exp\biggl\{\sum_{j=1}^{d} \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i}\biggr\}. \tag{3}$$

Соотношениями (1)–(3) определяется общая d-мерная параметрическая модель случайных подстановок. В этой модели совместная производящая функция случайного вектора $C(n) = (C_{A_1}(n), C_{A_2}(n), \dots, C_{A_d}(n))$ имеет вид

$$E_\theta \prod_{j=1}^{d} t_i^{C_{A_j}(n)} = H_n(t \times \theta) \Big/ H_n(\theta),\ t \times \theta = (t_1\theta_1, t_2\theta_2, \dots, t_d\theta_d).$$

Это представление позволяет изучать различные характеристики цикловой структуры случайных подстановок для широкого класса мер P_θ на S_n, включающего (при $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_d = 1$) и классическую равномерную меру.

Если в (1) подмножества A_j задать в виде $A_j = \{i\colon\ i = sd + j,\ s \geqslant 0\}$, то в этом случае говорят о конгруэнтных циклах, и для вектора $C(n) = (C_{A_1}(n), C_{A_2}(n), \dots, C_{A_d}(n))$ чисел конгруэнтных циклов в описанной модели установлен следующий результат.

Теорема. *Если $n \to \infty$, а параметры $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$ фиксированны, то компоненты вектора $C(n) = (C_{A_1}(n), C_{A_2}(n), \dots, C_{A_d}(n))$ асимптотически независимы и асимптотически нормальны с параметрами соответственно $((\theta_j/d)\ln n, (\theta_j/d)\ln n)$, $j = 1, 2, \dots, d$.*

Добавим к этому результату некоторые комментарии.

Как хорошо известно еще с классической работы В. Л. Гончарова, в модели равновероятных подстановок, когда каждая подстановка из S_n наблюдается с вероятностью $(n!)^{-1}$ (в нашей модели надо положить все $\theta_j = 1$), общее число циклов $C(n)$ случайной подстановки асимптотически нормально с параметрами $(\ln n, \ln n)$. Обобщение этого результата на неравновероятный случай: подстановка с числом циклов $C(n)$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta^{C(n)}$, где $\theta > 0$ — произвольный параметр, получено Эвансом. Именно, число циклов $C(n)$ в такой модели асимптотически нормально с параметрами $(\theta \ln n, \theta \ln n)$. Модель Эванса является частным случаем рассматриваемой нами модели и получается из нее при $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_d = \theta$.

Как следует из привед°нной теоремы, в нашей модели число циклов $C(n) = \sum_{j=1}^{d} C_{A_j}(n)$ случайной подстановки асимптотически нормально с параметрами $(\overline{\theta}\ln n, \overline{\theta}\ln n)$, $\overline{\theta} = d^{-1}\sum_{j=1}^{d}\theta_j$.

Таким образом, сформулированный в теореме результат обобщает свойство асимптотической нормальности числа циклов случайной подстановки (с логарифмическим порядком роста этого числа) на достаточно широкий класс неравновероятных моделей, давая одновременно информацию о более детальной структуризации циклов подстановки. В частности, теорема дает ответ также и на вопрос о цикловой структуре подстановок с «запретами», т. е. когда какие-то A_j-циклы в подстановке «запрещены» (соответствующие параметры θ_j надо положить равными нулю).

Полученный результат позволяет построить новый статистический критерий проверки гипотезы о равновероятности подстановок и вычислить его предельную мощность при «близких» альтернативах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивченко Г. И.*, *Медведев Ю. И.* О случайных подстановках. — Труды по дискретной математике, 2002, т. 5, с. 73–92.
2. *Ивченко Г.И.*, *Медведев Ю.И.* Случайные комбинаторные объекты. — Доклады РАН, 2004, т. 396, № 2, с. 151–154.
3. *Ивченко Г.И.*, *Медведев Ю.И.* Случайные подстановки: общая параметрическая модель. — Дискретн. матем., 2006, т. 18, № 4, с. 105–112.