А. С. Т и х о м и р о в (Великий Новгород, НовГУ). **Нижние оценки скорости сходимости марковского симметричного случайного поиска.**

Возьмем евклидово пространство $\mathbf{R}^d$ с евклидовой метрикой $\rho(x,y)$. Замкнутый шар радиуса r с центром в точке x обозначим $B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^d\colon\ \rho(x,y)\leqslant r\}$.

Пусть целевая функция $f\colon\ \mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{R}$ измерима и принимает минимальное значение в единственной точке $x_*=\arg\min\{f(x)\colon\ x\in\mathbf{R}^d\}$. Рассмотрим задачу поиска точки глобального минимума x_* с заданной точностью $\varepsilon>0$. Один из способов решения этой задачи состоит в применении марковских алгоритмов случайного поиска. *Случайным поиском* назовем последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ со значениями в $\mathbf{R}^d$. Следуя [1, 2], опишем исследуемый марковский случайный поиск при помощи алгоритма моделирования.

Алгоритм 1

Шаг 1. $\xi_0\leftarrow x$, $n\leftarrow 1$.

Шаг 2. $\eta_n\leftarrow P_n(\xi_{n-1},\cdot)$.

Шаг 3. $\xi_n\leftarrow\eta_n$ с вероятностью Q_n, и $\xi_n\leftarrow\xi_{n-1}$ с вероятностью $1-Q_n$, где $Q_n=Q_n(\eta_n,\xi_{n-1},f(\eta_n),f(\xi_{n-1}))$.

Шаг 4. $n\leftarrow n+1$ и перейти к шагу 2.

Здесь x — начальная точка поиска. Обозначение «$\eta_n\leftarrow P_n(\xi_{n-1},\cdot)$» читается как «получить реализацию случайной величины η_n с распределением $P_n(\xi_{n-1},\cdot)$». Различные правила задания вероятностей Q_n и переходных функций P_n приводят к различным вариантам марковских алгоритмов случайного поиска.

Будем рассматривать марковский случайный поиск, переходные функции P_n которого обладают *симметричными* плотностями $p_n(x,y)=g_{n,x}(\rho(x,y))$, где ρ — евклидова метрика, а $g_{n,x}$ — невозрастающие неотрицательные функции. Описанный поиск будем называть *марковским симметричным случайным поиском.*

Обозначим $\tau_\varepsilon=\min\{n\geqslant 0\colon\ \xi_n\in B_\varepsilon(x_*)\}$ момент первого попадания поиска в ε-окрестность точки минимума x_*. Рассмотрим три характеристики скорости сходимости. *Трудоемкость* случайного поиска определяется как $\mathbf{E}\,\tau_\varepsilon$ и имеет смысл среднего числа шагов поиска до достижения им множества $B_\varepsilon(x_*)$. *Гарантирующее число шагов* $N(x,f,\varepsilon,\gamma)$ определяется как такое минимальное число шагов поиска, при котором достижение множества $B_\varepsilon(x_*)$ гарантировано с вероятностью не меньшей, чем γ. Иначе говоря, $N(x,f,\varepsilon,\gamma)=\min\{n\geqslant 0\colon\ \mathbf{P}\{\tau_\varepsilon\leqslant n\}\geqslant\gamma\}$. Рассмотрим также значения вероятности «успеха» $\mathbf{P}\{\tau_\varepsilon\leqslant n\}$ для $n\in\mathbf{N}$.

Представленные результаты показывают, что число вычислений целевой функции, необходимое марковскому симметричному случайному поиску для достижения требуемой точности ε решения задачи, не может расти медленнее, чем $|\ln\varepsilon|$.

Теорема. *Пусть целевая функция* $f\colon\ \mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{R}$ *принимает минимальное значение в единственной точке* x_*. *Рассмотрим* ξ_n — *марковский симметричный случайный поиск алгоритма* 1 *с начальной точкой* x. *Пусть* $0<\varepsilon<\delta=\rho(x,x_*)$, $0<\gamma<1$ *и* $n\in\mathbf{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\mathbf{E}\,\tau_\varepsilon\geqslant\ln(\delta/\varepsilon)+1,\quad \mathbf{P}\{\tau_\varepsilon\leqslant n\}\leqslant\frac{\varepsilon}{\delta}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\ln^i(\delta/\varepsilon)}{i!},$$

$$N(x,f,\varepsilon,\gamma)\geqslant\min\left\{n\geqslant 1\colon\ \frac{\varepsilon}{\delta}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\ln^i(\delta/\varepsilon)}{i!}\geqslant\gamma\right\}\geqslant\gamma(\ln(\delta/\varepsilon)+1).$$

В заключение отметим, что для одномерного пространства оптимизации $\mathbf{R}$ и простейшей целевой функции $f(x)=|x|$ можно построить такой марковский симметричный случайный поиск, у которого $\mathbf{E}\,\tau_\varepsilon=2\ln(\delta/\varepsilon)+2$. Поэтому и оценка трудоемкости и оценка гарантирующего числа шагов теоремы имеют правильный порядок зависимости от ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихомиров А. С.* О скорости сходимости алгоритма simulated annealing. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т. 50, № 1, с. 24–37.
2. *Тихомиров А. С.* Нижние оценки скорости сходимости марковского симметричного случайного поиска. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2011, т. 51, № 9. (В печати.)