В. Г. Алябьева (Пермь, ПГПУ). **Комбинаторные (тактические) конфигурации: от сочетаний до блок-схем. История идей.**

Искусство комбинаторики в широком смысле Лейбниц понимал как часть Искусства Изобретения, отождествляя его с синтезом. Взгляды Лейбница на высокую значимость комбинаторного искусства разделял Дж. Дж. Сильвестр. Исследованию комбинаторных проблем Сильвестр посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 года «Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов» [2, v. 1, p. 91–102]. «Число, положение, комбинация — представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи» — пишет Сильвестр.

К идеям 1844 года Сильвестр вернулся в статьях 1861 года, в которых он вводит термин «тактика» для обозначения нового раздела математики, изучающего расположение элементов. К этому разделу он относил теорию групп (подстановок), комбинаторный анализ, теорию чисел.

Известными тактическими задачами в XIX веке были задача Киркмана о 15 школьницах (1850) и комбинаторные задачи Штейнера (1853). Киркман частично решил конкурсную задачу: найти наибольшее число $Q_{x,y,z}$ комбинаций из x элементов по y таких, чтобы никакие комбинации по z не встречались дважды [3]. Киркман решил задачу для $y = 3$ и $z = 2$. Он отметил, что для $x = 6n + 1$ или $6n + 3$ система троек строится, и построил систему троек для $x = 7$ и для $x = 15$. В 1850 году Киркман построил системы $(p + 1)$-множеств, составленные из элементов $(p^2 + p + 1)$-множества так, чтобы каждая пара элементов появлялась точно в одном $(p + 1)$-множестве. Позднее, когда были введены соответствующие понятия, стало ясно, что эти системы являются конечными проективными плоскостями порядка p.

Якоб Штейнер в ноябре 1852 года сформулировал знаменитые комбинаторные задачи.

1. Каким должно быть число N, чтобы N элементов можно было расположить в тройки так, чтобы каждые два элемента входили в одну и только одну тройку?

2. Каким должно быть число N, чтобы N элементов можно было расположить в четверки так, чтобы каждая тройка, не вошедшая в первую систему, входила в одну и только одну четверку, при этом никакие три элемента четверки не входили в первую систему троек?

И так далее до семерок.

В 1896 году американский математик Елиаким Гастингс Мур в статье «Tactical memoranda» [4] ввел термин «тактическая конфигурация». Пусть дано n множеств $a_1, a_2, \ldots, a_n$, для элементов которых задано отношение инцидентности. Эти множества образуют тактическую конфигурацию, если для любых g и h $(g \neq h)$ каждый элемент из множества g инцидентен с одним и тем же числом a_{gh} элементов из множества h. Конфигурация называется *геометрической*, если для элементов принадлежащих ей множеств можно ввести геометрическую терминологию, отождествив элементы множества i с подпространством R_{i-1} размерности $i - 1$ из пространства R_n размерности n.

Геометрия систем Штейнера была объектом специального изучения в статьях и кандидатской диссертации В. В. Афанасьева [1]. Он изучил выполнимость различных конфигураций в системах Штейнера $S(22, 6, 3)$, $S(23, 7, 4$, $S(24, 8, 5)$. Группами автоморфизмов перечисленных систем являются знаменитые спорадические группы Матье.

Обобщением понятия «тактическая конфигурация» в XX явилось понятие «блок-схемы». В 1935–1940 годах в статьях Р. Фишера [5], посвященных планированию эксперимента, появился сначала термин *block arangement*, затем — *block design*, для которого в русской литературе утвердился перевод «блок–схема». Под блок-схемой понимается система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая некоторым условиям, относящимся к частоте появления пар элементов в подмножествах системы. Блок-схема задается парой множеств (V, B), где $V = \{a_1, a_2, \dots, a_v\}$, $B = \{B_1, B_2, \dots B_b\}$, $B_i \subseteq V$, $i = 1, 2, \dots, b$. Элементы множества V называются *элементами блок-схемы*, а элементы множества B — ее *блоками*. Обозначим b число элементов в схеме, v число блоков. Число элементов, принадлежащих блоку B_j, обозначим k_j. Число блоков, инцидентных элементу a_i, обозначим r_i. Обозначим λ_{ij} число блоков, которым принадлежит пара элементов $\{a_i, a_j\}$. Если все блоки состоят из одинакового количества k элементов, если каждый элемент входит в одно и то же число r блоков и если число блоков, которым принадлежит любая пара элементов $\{a_i, a_j\}$, постоянна и равна λ, то схема называется *уравновешенной неполной* блок-схемой.

Теорема 1. *Для параметров уравновешенной неполной блок-схемы выполняются соотношения* $vr = kb$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$.

Частным видом тактических конфигураций являются конечные проективные и аффинные геометрии, которые были аксиоматически определены в конце XIX – начале XX века.

Освальд Веблен (Osvald Veblen, 1880–1960) в 1906 году в статье «Конечные проективные геометрии» указал общий метод построения конечных проективных пространств размерностей, превышающих 2, и конечных проективных плоскостей над полями Галуа, сформулировал аксиоматику конечной n-мерной геометрии. Веблен доказал, что для проективной n-мерной геометрии ($n > 2$) выполняется теорема Дезарга. Выполнимость теоремы Дезарга для конечной проективной плоскости зависит от свойств координатизирующей системы.

Теорема 2. *Конечная проективная плоскость, построенная над полем, дезаргова.*

Теория тактических конфигураций развивалась, тесно взаимодействуя с теорией геометрических конфигураций, теорией конечных групп и с теорией графов. В 1974 году в статье «Тактические конфигурации: введение» L. Q. Judith определил тактическую конфигурацию ранга r на языке теории графов как семейство r непересекающихся множеств вершин $A_1, A_2, \dots, A_r$, называемых *связками*, с соотношением смежности между вершинами. Каждая вершина связки A_i смежна с вершинами связки A_J. Это постоянное число d_{ij} называется $(i-j)$-*степенью*, множество всех таких степеней называется *множеством степеней конфигурации.* Тогда тактическую конфигурацию можно определить как r-дольный граф. Проективная плоскость порядка n определяется как конфигурация ранга 2 со множеством степеней $\{n, n\}$, с обхватом 6 и размерами обеих полос $n^2 + n + 1$. Обхват графа равен числу вершин в наименьшем полигоне графа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев В. В.* Теорема Микеля и ее обобщения для систем Штейнера $S(22, 6, 3)$, $S(23, 7, 4)$, $S(24, 8, 5)$. Ярославль: ЯрПГПИ, 1984. Деп. в ВИНИТИ, 16.04.84, № 2370-84.
2. *Sylvester J. J.* The collected mathematical papers. Cambridge: 1889–1898, v. 1–2.
3. *Kirkman T. P.* On a problem in combinations. — Cambridge and Dublin Math. J., 1847, v. 2, p. 192–204.
4. *Moore E. H.* Tactical memoranda I–III. — American J. of Mathematics, 1896, v. 18, p. 264–303.
5. *Fisher R. A.* The design of experiments. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1942, 236 p.