Е. Г. Гольштейн (Москва, ЦЭМИ РАН). **Об одном классе антагонистических игр.**

Хорошо известно, что матричная игра, определяемая кососимметричной матрицей, имеет цену игры, равную нулю, и совпадающие множества оптимальных стратегий игроков. Приводимое ниже утверждение устанавливает наличие этих свойств кососимметричной матричной игры у более широкого класса антагонистических игр.

Теорема 1. *Пусть Γ — антагонистическая игра, в которой оба игрока имеют одно и то же множество стратегий G, а функция выигрышей первого игрока есть $f(x,y)$, $x \in G$, $y \in G$. Если G — выпуклый компакт, $f(x,y)$ вогнута по x при любом фиксированном $y \in G$, выпукла по $y \in G$ при любом фиксированном $x \in G$, непрерывна на $G \times G$ и, кроме того, $f(x,x)=0$ для любого $x \in G$, то цена игры Γ равна нулю и множества оптимальных стратегий игроков игры Γ одинаковы.*

Теорема 1 используется для одного класса бескоалиционных игр со многими участниками. Пусть S — бескоалиционная игра с числом игроков $k \geqslant 2$, X_i — множество стратегий игрока i, $\widehat{X}_i$ — прямое произведение множеств X_t при $1 \leqslant t \leqslant k$, $t \neq i$, X – прямое произведение всех множеств X_i, $f_i(x_i,\widehat{x}_i)$ — функция выигрышей игрока i при $x_i \in X_i$, $\widehat{x}_i \in \widehat{X}_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Положим

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{k}[f_i(x_i,\widehat{x}_i)-f_i(y_i,\widehat{y}_i)], \qquad x \in X, \quad y \in X.$$

Из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция $f_i(x_i,\widehat{x}_i)$ непрерывна на X, вогнута по $x_i \in X_i$ при любом фиксированном $\widehat{x}_i \in \widehat{X}_i$, выпукла по $\widehat{x}_i \in \widehat{X}_i$ при любом фиксированном $x_i \in X_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, и, кроме того, суммарный выигрыш всех k игроков игры S является вогнутой функцией на X. В таком случае седловое множество антагонистической игры Γ, определяемой функцией выигрышей $f(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, первого игрока, является прямым произведением $X^* \times X^*$, где X^* — множество точек Нэша игры S, цена игры Γ равна нулю.*

Теорема 2 допускает уточнение для конечных игр многих лиц, рассматриваемых в смешанных стратегиях. Для описания подобных игр удобно использовать таблицы, элементы которых нумеруются при помощи нескольких индексов (их число равно числу игроков k). Такие таблицы иногда называют *k-мерными.* Для записи k-мерной таблицы A введем обозначение $A=(a_{s_1 s_2 \dots s_k})_{n_1 n_2 \dots n_k}$, где s_α — индекс с номером α, принимающий целые значения от 1 до n_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant k$, $a_{s_1 s_2 \dots s_k}$ — элемент таблицы A, определенный k индексами при значениях соответственно $s_1, s_2, \dots, s_k$. Рассмотрим конечную бескоалиционную игру с k участниками, в которой игрок i имеет n_i стратегий, а его функция выигрышей задается при помощи k-мерной таблицы $A_i=(a^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k})_{n_1 n_2 \dots n_k}$, где $a^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k}$ — выигрыш игрока i, если игрок α выбирает стратегию s_α, $1 \leqslant \alpha \leqslant k$. Если расширить множества стратегий игроков путем введения смешанных стратегий, то приходим к игре S с k участниками, в которой

$$\begin{aligned} &X_i=\{x_i=(x_{i1},x_{i2},\dots,x_{in_i})\colon \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}=1,\ x_{ij}\geqslant 0,\ j=1,2,\dots,n_i\},\\ &f_i(x)=\sum_{s_s s_2 \dots s_k} a^{(i)}_{s_1 s_2 \dots s_k} x_{1s_1} x_{2s_2} \cdots x_{ks_k}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,\\ &x=(x_1,x_2,\dots,x_k)\in X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 3. *Пусть конечная игра S определяется соотношениями* (1)*. Требования к функциям выигрышей игры S, фигурирующие в формулировке теоремы* 2, *выполняются в том и только в том случае, если при* $x \in X$

$$f_i(x) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant k,\, t \neq i} [x_i a_{it} x_t^T + \langle b_t, x_t \rangle], \qquad (2)$$

где a_{it} *— матрица с* n_i *строками и* n_t *столбцами,* b_t *—* n_t*-мерный вектор, причем*

$$a_{it} + a_{ti}^T = 0 \qquad (3)$$

для любых двух различных i, t, *меняющихся от 1 до* k.

Из теоремы 3 следует, что в случае, если игра S задается соотношениями (1), требования к функциям выигрышей игроков игры S, которые перечислены в формулировке теоремы 2, эквивалентны допущению об аффинности соответствующих функций.

Введем квадратную матрицу A порядка $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, составленную из матричных блоков a_{it}, $i, t \in \{1, 2, \dots, k\}$, где a_{ii} — нулевая квадратная матрица порядка t_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, а матрицы a_{it} при $i \neq t$ содержатся в представлении (2). Согласно (3), матрица A кососимметрична.

Из теорем 2, 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* S *— конечная бескоалиционная игра в смешанных стратегиях, определяемая соотношениями* (1), *причем функции выигрышей ее игроков удовлетворяют требованиям, перечисленным в теореме* 2. *В таком случае седловое множество антагонистической игры* Γ, *задаваемой билинейной функцией* xay^T *выигрышей первого игрока при* $x, y \in X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$, *совпадает с прямым произведением* $X^* \times X^*$, *где* X^* *— множество точек Нэша игры* S, *игра* Γ *имеет нулевую цену.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00156.