

**В. Н. С о б о л е в** (Москва, РХТУ). **О точности некоторых асимптотических разложений в центральной предельной теореме.**

Пусть  $X_1, X_2, \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные величины (с. в.) с нулевым средним  $\mathbf{M} X_1 = 0$  и единичной дисперсией  $\mathbf{D} X_1 = 1$ ,  $F(x)$  — функция распределения (ф. р.) случайной величины  $X_1$ ,  $F_n(x)$  — ф. р. нормированной суммы  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)n^{-1/2}$ , где  $n$  — натуральное число,  $\Phi(x)$  — ф. р. стандартного нормального закона.

Самым известным результатом о точности аппроксимации в ЦПТ является теорема Берри–Эссеена, которая утверждает, что

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leq c \frac{\beta_3}{\sqrt{n}},$$

где  $\beta_3 = \mathbf{E}|X_1|^3$  — третий абсолютный момент, а  $c > 0$  — постоянная. Нижняя оценка  $c \geq (3 + \sqrt{10})/(6\sqrt{2}\pi)$  была получена К.-Г. Эссееном [3]. Эта оценка с неравенством  $\beta_3 \geq 1$  (для с. в. с  $\mathbf{M} X_1 = 0$  и  $\mathbf{D} X_1 = 1$ ) показывает, что для того, чтобы  $\rho(F_n, \Phi) \leq 10^{-3}$ , необходимо  $n > 160000$ .

Поэтому для получения содержательных аппроксимаций для  $F_n(x)$  при  $n$  порядка нескольких сотен или десятков необходимо изменять постановку задачи, например, использовать асимптотические разложения [1]. Оценки остаточных частей асимптотических разложений, представленные в [2], достаточно громоздки, однако это не мешает их применению. Проиллюстрируем это посредством модельного распределения, ф. р.  $F$  которого имеет плотность, равную  $e^{-x-1}$  при  $x \geq -1$ , и 0 при  $x < -1$ .

Оценка остаточной части разложения теоремы 3 из [2] для плотности модельного распределения не превосходит

$$\frac{482,5}{n^3} + \frac{172}{n^{7/2}} + \frac{718}{n^4} + \frac{7065}{n^{9/2}} + \frac{1814}{n^5} + \frac{1348}{n^6},$$

что уже при  $n > 78$  не превосходит  $10^{-3}$ . Соответствующая оценка остаточной части разложения для ф. р. заведомо лучше.

В то же время, для того чтобы теорема Берри–Эссеена гарантировала для ф. р. точность аппроксимации нормальным законом  $10^{-3}$ , для модельного распределения  $n \geq 987755$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
2. *Соболев В. Н.* Об асимптотических разложениях в центральной предельной теореме. — Теория вероятн. и ее примен., 2007, т. 54, в. 3, с. 490–505.
3. *Esseen C.-G.* A moment inequality with an application to the central limit theorem. — Skand. Aktuarvetidskr., 1956, v. 39, p. 160–170.