В. Г. Выскребцов (Москва, МГТУ «МАМИ»). **Значение именно точных решений уравнений движения вязкой жидкости Навье–Стокса.**

Ранее как метод получения точных решений уравнений Навье–Стокса были применены методы дифференциальной геометрии и, как дополнительное уравнение, свойство гладкости ортогональных сетей, линиями которых служат линии тока установившегося движения частиц несжимаемой вязкой среды и ортогональными к ним линии центробежных ускорений. Возможно также с аналогичными результатами использование и аппарата тензорного анализа. При первом подходе свойство гладкости приводит к появлению дополнительного дифференциального уравнения в частных производных относительно радиусов кривизн линий траекторий, а при втором подходе — к требованию того, чтобы тензор Римана в области течения среды был равен нулю. При этом условие гладкости сетей линий из траекторий трактуется как движение частиц среды по траекториям без ударов и скачков. Кроме того, используется как существенное условие конечность (ограниченность) скоростей движения и их градиентов. Выполнение этих требований оказывается достаточным для однозначного решения уравнений Навье–Стокса. Эти уравнения с учетом безударности движения и ограниченных, конечных значений скоростей течения не требуют никаких дополнительных условий для однозначного решения уравнений Стокса.

Траектории течений жидкости, соответствующих нескольким из точных решений уравнений Навье–Стокса, давно наблюдались в опытах. Это течения вдоль прямых линий в трубах (течение Пуазейля) и движение по окружностям между коаксиальными цилиндрами (течение Куэтта).

Наблюдение других течений, соответствующих точным решениям, из литературы не известно, хотя широко известны мнения, например, о том, что «... общая картина наблюдающихся в действительности ламинарных движений и многие их детали достаточно хорошо описывались решениями уравнений Стокса при соответствующих, также «регулярных», начальных и граничных условиях. Можно, например, вспомнить пуазейлево движение вязкой жидкости по круглой трубе ...».

В данном докладе принципиально различаются течения жидкости, описываемые точными решениями уравнений Стокса и описываемые так называемыми *приближенными решениями* (с всегда неизвестной степенью приближенности), которые о-отождествляются с такими действительными течениями, как движение смазки в узких зазорах, течение в ламинарном пограничном слое и др.

Утверждение 1 (Н. А. Слезкин). *Уравнения Стокса для установившихся автомодельных осесимметричных движений несжимаемой среды, записанные в сферической системе координат, сводятся к одному обыкновенному, с одной независимой переменной дифференциальному уравнению первого порядка типа Риккати относительно некой функции $f(\eta)$, которая пропорциональна функции тока*:

$$2(1-\eta^2)f^1(\eta) - f^2(\eta) + 4\eta f(\eta) + C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3 = 0.$$

В этом уравнении C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования, которые должны определяться граничными условиями.

Это уравнение может быть сведено заменой $f(\eta) = -2(1-\eta^2)Y^2\eta/Y(\eta)$ к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами вида:

$$\frac{(1-\eta^2)^2 Y^{II} - (C_1\eta^2 + C_2\eta + C_3)Y(\eta)}{4} = 0. \qquad (*)$$

Утверждение 2. *Уравнение (*) имеет бесконечно много точных решений вида*

$$Y(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_N\eta^N.$$

Здесь $N = 1, 2, 3, \ldots,\ a_i = \mathrm{const}.$

Единственным точным решением, которому соответствует ограниченная скорость в ограниченном объеме течения, выражается зависимостью $f(\eta) = E_1(m+\eta)$. *Здесь* E_1, m — *константы, выражаемые через* $C_1, C_2, C3$.

Уравнения траекторий в декартовой системе координат для этого решения представляются эллипсами, гиперболами и параболами, пересекающими ось симметрии.

Результаты опытов показали, что характер течения воды из окружающего пространства в пористую боковую поверхность трубки соответствует этим траекториям. Кроме того, итоги опытов однозначно свидетельствуют о том, что реальные течения при сходящихся траекториях ламинарны, а при расходящихся — беспорядочны, турбулентны. Ламинарное движения вязкой жидкости по расходящимся траекториям невозможно. Втекание воды в боковую пористую поверхность трубки происходит всегда в ламинарном режиме, но вытекание при той же скорости — только в турбулентном. Другими словами, течение жидкости ламиниризуется при ускоренном движении, и это имеет теоретическое объяснение.

Действительно, рассмотрим течение в боковую поверхность трубки на удалении от начала координат, где линии тока как эллиптического типа, так и параболического или гиперболического типов можно считать прямыми. Тогда течение, рассматриваемое в поперечном сечении, будет соответствовать классическим линиям тока или источника в виде пересекающихся в одной точке прямых линий (лучей, выходящих из начала координат). Рассмотрим на одной из линий тока две точки, M_1 и M_2. Обозначим V_1 и V_2 скорости движения жидкости в точках соответственно, а давления обозначим соответственно P_1 и P_2.

При движении жидкости вдоль прямолинейных пересекающихся в одной точке траекторий движение среды происходит аналогично картине движения плоского безвихревого течения при так называемой *идеальной* (не имеющей вязкости) жидкости. Такое течение называют *источником* (*стоком*). Поэтому можно считать, что для этого течения применим интеграл Бернулли, смыслом которого является постоянство суммы кинетических и потенциальных энергий жидкой частицы при движении по траектории. Отсюда, считая жидкость однородной с плотностью ρ и что движение происходит на одном уровне, т. е. пренебрегая изменением потенциальной энергии положения, получим $V_1^2/2 + P_1/\rho = V_2^2/2 + P_2/\rho = \mathrm{const}$.

Пусть точка M_2 неопределенно удалена от начала координат, а точка M_1 близка (рис. 5). Тогда, считая по-прежнему жидкость несжимаемой, получим, что V_2 на удалении близка к нулю, а давление P_2 близко к некоторому постоянному значению P_0. Пренебрегая в силу малости V_2 по сравнению с V_1, получим из предыдущего выражения $(P_1 - P_2)/\rho = -V_1^2/2 < 0$. Отсюда очевидно, что в любой точке траекторий указанного течения $P_1 < P_2$. Физически возможен только ламинарный сток, но не источник.

Обратим внимание на существование так называемых *вихрей Гертлера*, возникающих при обтекании воздухом цилиндра и имеющих плоскость вращения, перпендикулярную обычно наблюдаемым вихрям. Вследствие образования вихрей Гертлера коэффициент сопротивления цилиндра периодически меняется вдоль его оси примерно вдвое (согласно опытам ЦАГИ). Картина течения сохраняется вплоть до скоростей, достигающих 0,5 скорости звука. Существование этих вихрей не может быть объяснено уравнениями Навье–Стокса. В опытах с течениями жидкостей и газа наблюдаются также и другие явления того же необъяснимого порядка.

Сказанное позволяет сделать вывод о том, что имеются основания для того, чтобы считать, что при описании движений сплошных сред уравнения Навье–Стокса не являются достаточно точной математической моделью движения, так как. они не учитывают какие-то неизвестные существенные особенности движущейся сплошной среды.