А. В. И в а н о в (Москва, МИЭМ (ТУ)). **Полумарковская модель управления запасом непрерывного продукта.**

Рассматривается некоторая система, предназначенная для хранения и поставки потребителю запаса продукта, объем которого описывается непрерывным параметром $x(t)$, $t \geqslant 0$, принимающим значения во множестве $(-\infty, \tau]$ ($\tau > 0$ — максимальная вместимость хранилища).

Проводится дискретизация модели: множество $(-\infty, \tau]$ разбивается на конечное число подмножеств:

$$\Big[0, \tau_1^{(0)}\Big), \Big[\tau_1^{(0)}, \tau_2^{(0)}\Big), \dots, \Big[\tau_{N_0-1}^{(0)}, \tau_{N_0}^{(0)}\Big), \quad \text{где } \tau_{N_0}^{(0)} = \tau,$$

$$\Big(-\infty, \tau_{N_1}^{(1)}\Big], \Big(\tau_{N_1}^{(1)}, \tau_{N_1-1}^{(1)}\Big], \dots, \Big(\tau_1^{(1)}, \tau_0^{(1)}\Big], \quad \text{где } \tau_0^{(1)} = \tau.$$

Изменение объема запаса происходит по следующим правилам. В начальный момент функционирования системы или в момент окончания очередного пополнения планируется момент времени, в который будет сделан заказ на следующее пополнение запаса. Если в момент очередного пополнения уровень запаса принадлежит подмножеству $[\tau_i^{(0)}, \tau_{i+1}^{(0)})$, то момент следующего пополнения планируется через случайное время $\eta_i^{(0)}$, имеющее распределение $G_i^{(0)}(x)$. В запланированный момент времени производится заказ на пополнение запаса и начинается так называемый *период задержки* (период подготовки очередного заказа), который продолжается случайное время с заданным распределением. Во время задержки потребление запаса прекращается.

Непосредственное пополнение запаса происходит следующим образом. Если в момент заказа уровень запаса является положительным и принадлежит подмножеству состояний $[\tau_k^{(0)}, \tau_{k+1}^{(0})$, то в результате пополнения он переходит в подмножество $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$, $l \geqslant k$, с вероятностью $\beta_{kl}^{(0)}$. Если в момент заказа уровень запаса является отрицательным и принадлежит множеству $(\tau_k^{(1)}, \tau_{k-1}^{(1)}]$, то в результате пополнения он становится положительным и переходит в подмножество $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$ с вероятностью β. Таким образом, после пополнения запас всегда является положительным и дефицит продукта ликвидируется.

Если в результате пополнения процесс, описывающий уровень запаса, оказывается в подмножестве состояний $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$, то состояние внутри этого подмножества (точный уровень запаса) определяется в соответствии с распределением вероятностей $B_l(x)$, заданном на множестве $[\tau_l^{(0)}, \tau_{l+1}^{(0)})$. Данные распределения описывают случайные отклонения объема поставки продукта.

После завершения каждого пополнения эволюция процесса, описывающего уровень запаса, происходит независимо от прошлого и по правилам, которые были изложены выше.

Для математического описания рассматриваемой системы, кроме основного случайного процесса, непосредственно описывающего уровень запаса в произвольный момент времени, вводится вспомогательный полумарковский случайный процесс с конечным множеством состояний. Управление этим процессом производится в последовательные моменты пополнения запаса и заключается в выборе значения длительности интервала времени до следующего момента заказа на пополнение запаса. Проблема оптимизации управления заключается в выборе вероятностных распределений $G_i^{(0)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, N_0$ (которые называются *управляющими*), доставляющих экстремум некоторому стационарному показателю качества управления.

В ходе проведенного исследования были получены следующие основные результаты.

1. Найдены представления для переходных вероятностей вспомогательного полумарковского процесса с конечным множеством состояний.

2. Определены представления для стоимостных характеристик управляемого полумарковского процесса: математических ожиданий затрат и прибыли за время пребывания в состояниях.

3. Получены общие представления для стационарных вероятностей цепи Маркова, вложенной в управляемый полумарковский процесс, в виде функционалов от управляющих вероятностных распределений $G_i^{(0)}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, N_0$.

4. Доказано утверждение об аналитическом представлении стационарных показателей качества управления (средних удельных затрат или средней удельной прибыли) в виде дробно-линейных функционалов от управляющих вероятностных распределений.

5. На основе общих теоретических результатов о структуре функционалов качества управления разработана методика определения оптимальных детерминированных значений параметров управления, т. е. оптимальных величин периодов времени от момента пополнения до момента заказа новой порции продукта в зависимости от состояния системы.