В. А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ). **О численном решении одного класса линейных уравнений с частными интегралами.**

Рассматривается интегральное уравнение

$$x(t,s)=\int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau+\int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma$$
$$+\int_a^t\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma+f(t,s)\equiv(L+M+N)x(t,s)+f(t,s),\quad(1)$$

где l,m,n и f — заданные непрерывные функции. Уравнение (1) обратимо в пространстве $C(D)$ непрерывных на $D=[a,b]\times[c,d]$ функций. Его явное решение находится редко. Применение известных численных схем решения обычных интегральных уравнений требует обоснования, так как оператор $L+M+N$ не компактен при ненулевой функции l или m. Приводимая ниже теорема содержит условия применения к уравнению (1) метода механических квадратур, основанного на замене интегралов по квадратурным и кубатурным формулам.

Отрезки $[a,b]$ и $[c,d]$ разобъем на части точками $t_p=a+ph$ ($p=0,1,\ldots,P$, $a+Ph\leqslant b<(P+1)h$), $s_q=c+qg$ ($q=0,1,\ldots,Q$, $c+Qg\leqslant d<(Q+1)g$). Полагая в (1) $t=t_p$, $s=s_q$ и заменяя первый и второй интегралы по квадратурным формулам

$$\int_a^{t_p} l(t_p,s_q,\tau)x(\tau,s_q)\,d\tau=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x(t_i,s_q)+u_{pq},$$

$$\int_c^{s_q} m(t_p,s_q,\sigma)x(t_p,\sigma)\,d\sigma=g\sum_{j=0}^{q}\beta_{qj}m_{pqj}x(t_p,s_j)+v_{pq}$$

с узлами в точках $t=t_p$ и $s=s_q$, а третий интеграл — по кубатурной формуле

$$\int_a^{t_p}\int_c^d n(t_p,s_q,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma=hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}n_{pqij}x(t_i,s_j)+w_{pq},$$

где $l_{pqi}=l(t_p,s_q,t_i)$, $m_{pqj}=m(t_p,s_q,s_j)$, $n_{pqij}=n(t_p,s_q,t_i,s_j)$, а u_{pq}, v_{pq} и w_{pq} — остатки этих формул, получим систему уравнений относительно неизвестных $x(t_i,s_j)$ ($i=0,1,\ldots,P$, $j=0,1,\ldots,Q$). Отбрасывая остатки, получим систему уравнений для приближенных значений x_{pq} функции x в точках (t_p,s_q):

$$x_{pq}=h\sum_{i=0}^{p}\alpha_{pi}l_{pqi}x_{iq}+g\sum_{j=0}^{q}\beta_{qj}m_{pqj}x_{pj}+hg\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{Q}\gamma_{pqij}x_{ij}+f_{pq}+\delta_{pq}\qquad(2)$$

($p=0,1,\ldots,P$, $q=0,1,\ldots,Q$), где $f_{pq}=f(t_p,s_q)$, а δ_{pq} — погрешности вычислений для уравнений системы (2).

Теорема. *Пусть в квадратурных и кубатурной формулах остатки стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to0$, $|\alpha_{pi}|\leqslant A<\infty$, $|\beta_{qj}|\leqslant B<\infty$, $|\gamma_{pqij}|\leqslant C<\infty$ и погрешности вычислений стремятся к нулю равномерно относительно p,q при $h,g\to0$. Тогда при всех достаточно малых h и g приближенное решение x_{pq} ($p=0,1,\ldots,P$, $q=0,1,\ldots,Q$) может быть найдено по формуле (2), причем для любого заданного $\varepsilon>0$ существуют такие h_0 и g_0, что при $h<h_0$ и $g<g_0$ имеет место $|x_{pq}-x(t_p,s_q)|<\varepsilon$ ($p=0,1,\ldots,P$, $q=0,1,\ldots,Q$).*