Е. С. П а л а м а р ч у к (Москва, ЦЭМИ РАН)**. О стохастической оптимальности в задаче линейного регулятора с вырождающимся возмущением.**

Исследуются вероятностные свойства оптимального в среднем управления в задаче линейного регулятора с вырождающимся возмущением.

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ задан одномерный случайный процесс $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$, описываемый уравнением

$$dX_t = a_t X_t\,dt + b_t U_t\,dt + \sigma_t\,dW_t, \qquad X_0 = x, \tag{1}$$

где $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерный стандартный винеровский процесс, a_t, b_t, σ_t — ограниченные кусочно-непрерывные функции. В качестве допустимых управлений рассмотрим процессы $\{U_t\}_{t=0}^{\infty}$, согласованные с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s,\, s\leqslant t\}$, такие, что уравнение (1) имеет решение. Множество таких управлений обозначим $\mathcal{U}$. Определим целевой функционал

$$J_T(U^T) = \biggl\{\int_0^T (q_t X_t^2 + U_t^2)\,dt\biggr\}, \tag{2}$$

где T — конечный момент времени, $U^T = \{U_t\}_{t\leqslant T}$ — сужение управления $U\in\mathcal{U}$ на интервале $[0,T]$, $q_t \geqslant 0$ — ограниченная кусочно-непрерывная функция. Рассматривается случай вырождающегося возмущения («малого шума»), т. е. $\sigma_t \to 0$, $t\to\infty$. Эта ситуация возникает в целом ряде приложений. В частности, задача управления процессом вида (1) с ограниченной функцией σ_t и функционалом качества, включающим дисконтирование, может быть сведена к задаче вида (1)–(2) с вырождающимся возмущением (см. [2]).

О п р е д е л е н и е 1. Управление $U^*\in\mathcal{U}$ будем называть *оптимальным в среднем на бесконечном интервале времени*, если оно является решением задачи

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbf{E}\, J_T(U) \Big/ \int_0^T \sigma_t^2\,dt \to \inf_{U\in\mathcal{U}}. \tag{3}$$

Показывается, что при выполнении условий, аналогичных приводимым в [1], управление $\{U_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ имеет вид

$$U_t^* = -b_t \Pi_t X_t^*, \tag{4}$$

где процесс $\{X_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ задается уравнением $dX_t^* = (a_t - b_t^2\Pi_t)X_t^*\,dt + \sigma_t\,dW_t$, $X_0^* = x$, Π_t $(t\geqslant 0)$ — такая неотрицательная ограниченная функция, что $\Pi_t = \lim_{T\to\infty}\Pi_t^T$, при этом Π_t^T $(0\leqslant t\leqslant T)$ — решение уравнения $\dot\Pi_t^T + 2a_t\Pi_t^T - b_t^2(\Pi_t^T)^2 + q_t = 0$, $\Pi_T^T = 0$. При этом для функции $\Phi(t,s) = \exp\{\int_s^t (a_\tau - b_\tau^2\Pi_\tau)\,d\tau\}$ справедлива экспоненциальная оценка вида $|\Phi(t,s)| \leqslant \kappa_1 \exp\{-\kappa_2(t-s)\}$, $s\leqslant t$ $(\kappa_1,\kappa_2>0$ — константы).

Далее зафиксируем $U\in\mathcal{U}$ — некоторое произвольное допустимое управление и $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ — соответствующий ему процесс, определяемый уравнением (1).

О п р е д е л е н и е 2. *Процессом дефекта оптимального в среднем* управления (4) на управлении $U\in\mathcal{U}$ называется процесс $\Delta_T(U) := J_T(U^*) - J_T(U)$, $T>0$.

Выбирая различные $U\in\mathcal{U}$, мы будем иметь семейство процессов $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция h_T является *верхней функцией* для семейства процессов дефекта $\{\Delta_T(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$, если для любого $U\in\mathcal{U}$ существует такой почти наверное конечный момент времени T_0, что $\Delta_T(U)\leqslant h_T$ почти наверное для $T>T_0$.

В [1] при произвольной ограниченной функции σ_t было показано, что верхней функцией является $h_T = b\ln T$ $(b>0$ — константа). Для случая «малого шума» доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\lim_{t\to\infty}\sigma_t = 0$, *тогда* $h_T = o\,(\ln T)$.

В ряде ситуаций можно уточнить порядок h_T. Доказано следуюшее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что имеет место одна из следующих ситуаций.*

I. $\limsup_{t\to\infty} \sigma_t^2 \ln t = c$ ($c \geqslant 0$ *— некоторая константа*). *Тогда любая такая функция* h_T, *что* $h_T \to \infty$ *при* $T \to \infty$, *является верхней функцией для семейства процессов дефекта.*

II. *Для функции* σ_t *выполняются условия*: а) *существует такое* $t_0 > 0$, *что* σ_t *дифференцируема для* $t > t_0$; б) *при* $t \to \infty$ *выражение* $\sigma_t^2 \ln t \to +\infty$; в) *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $\sigma_t'/\sigma_t + \kappa_2 \geqslant \varepsilon$ *для* $t \geqslant t_0$. *Тогда* $h_T = c_1 \sigma_T^2 \ln T$ ($c_1 > 0$ *— некоторая константа*).

III. *При* $t \to \infty$ *предел* $\lim_{t\to\infty} \sigma_t^2 \ln t$ *не существует, но* $\widehat{\sigma}_t^2 \ln t \to +\infty$, *где* $\widehat{\sigma}_t = \sup_{s \geqslant t} \sigma_s$. *Тогда если для функции* $\widehat{\sigma}_t$ *выполнено условие, сформулированное в* II, *то* $h_T = c_2 \widehat{\sigma}_T^2 \ln T$ ($c_2 > 0$ *— некоторая константа*).

Работа поддержана РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белкина Т. А., Кабанов Ю. М., Пресман Э. Л.* О стохастической оптимальности для линейно-квадратического регулятора. — Теория вероятн. и ее примен., 2003, т. 48, в. 4, с. 661–675.
2. *Паламарчук Е. С.* Управление процессом сходимости цены к равновесному значению при наличии случайных факторов. — В сб.: Анализ и моделирование экономических процессов. / Под ред. В. З. Беленького. В. 7. М.: ЦЭМИ РАН, 2010, с. 123–136.