М. Е. Л и п а т о в (Москва, МГУ)**. Возвратность случайных блужданий на группе Лоренца и редукция матричных коциклов.**

Пусть T — эргодический, сохраняющий меру автоморфизм стандартного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Произвольный случайный элемент $A\colon \Omega \to G$, где G — некоторая топологическая группа (снабженная борелевской σ-алгеброй), порождает G-значный *коцикл*, т. е. случайную последовательность $A_n(\omega)$, которая задается формулой

$$A_n(\omega) := \begin{cases} A(T^{n-1}\omega)A(T^{n-2}\omega)\cdots A(T\omega)A(\omega), & n \geqslant 1, \\ \mathrm{Id}, & n = 0, \\ A^{-1}(T^{-|n|}\omega)A^{-1}(T^{-|n|+1}\omega)\cdots A^{-1}(T^{-2}\omega)A^{-1}(T^{-1}\omega), & n \leqslant -1. \end{cases}$$

Случайные элементы $A\colon \Omega \to G$ и $B\colon \Omega \to G$ (соответственно, коциклы $A_n(\omega)$ и $B_n(\omega)$) называются *когомологичными*, если существует такой случайный элемент C: $\Omega \to G$, что $B(\omega) = C^{-1}(T\omega)A(\omega)C(\omega)$ п. н. В работах [1–3] доказывается, что произвольный коцикл со значениями соответственно в группах $G = GL(2, \mathbf{R})$, $SL(2, \mathbf{R})$, $GL(d, \mathbf{R})$ когомологичен коциклу, имеющему каноническую форму. Одним из когомологических инвариантов коциклов является свойство их *рекуррентности*, которое, будучи аналогом возвратности случайных блужданий, для матрично-значных коциклов $A_n(\omega)$ означает, что

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ B \in \mathcal{F}_+,\ \exists\ n \in \mathbf{N}\colon\ \mathbf{P}\left\{B \cap T^{-n}B \cap \{\|A_n(\omega) - \mathrm{Id}\| < \varepsilon\}\right\} > 0.$$

Здесь $\mathcal{F}_+ = \{B \in \mathcal{F}\colon\ \mathbf{P}\,(B) > 0\}$ и $\|\cdot\|$ — любая матричная норма. Рекуррентность коциклов со значениями в группах $SL(2, \mathbf{R})$ и $SL(2, \mathbf{C})$ изучалась в работах [2, 4] соответственно. Для $G = SO_0(1, n)$ (собственной ортохронной группы Лоренца) нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *Любая случайная матрица* $A\colon \Omega \to SO_0(1, n)$ *когомологична либо случайной матрице* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k(\omega) \end{pmatrix}$, *где* $k(\omega)$ — *некоторая* $SO(n)$*-значная случайная матрица, при этом коцикл* $A_n(\omega)$ *рекуррентен, либо случайному элементу со значениями в минимальной параболической подгруппе группы* $SO_0(1, n)$, *либо случайной матрице, равной*

$$\begin{pmatrix} \alpha(\omega) & \beta(\omega) & 0 \\ \beta(\omega) & \alpha(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & k_1(\omega) \end{pmatrix} \text{ при } \omega \in \overline{\Delta} \text{ и } \begin{pmatrix} \alpha(\omega) & \beta(\omega) & 0 \\ -\beta(\omega) & -\alpha(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & k_2(\omega) \end{pmatrix} \text{ при } \omega \in \Delta,$$

для некоторой случайной величины ψ *при* $\alpha(\omega) = \mathrm{ch}\,(\psi(\omega))$, $\beta(\omega) = \mathrm{sh}\,(\psi(\omega))$, *такого множества* $\Delta \in \mathcal{F}$, *что* $\exp\{i\pi I_\Delta(\omega)\}$ *не когомологично* 1 *(т. е. не равно* $f^{-1}(T\omega)f(\omega)$ *п. н. ни при какой борелевской функции* $f\colon \Omega \to \mathbf{R}$*), и случайных матриц* $k_1\colon \Omega \to SO(n-1)$ *и* $k_2\colon \Omega \to O(n-1)$ *с* $\det k_2 = -1$. *Причем если* $\mathbf{E}\,|\psi(\omega)| < \infty$, *то в последнем случае коцикл* $A_n(\omega)$ *рекуррентен.*

Следствие. *Любой* $SL(2, \mathbf{C})$*-значный случайный элемент когомологичен либо случайному элементу со значениями в группе* $SU(2, \mathbf{C})$, *либо верхней треугольной случайной матрице, либо случайному элементу, равному диагональной матрице на множестве* $\overline{\Delta}$ *и антидиагональной матрице на множестве* Δ, *где* $\Delta \in \mathcal{F}$ — *такое, что* $\exp\{i\pi I_\Delta(\omega)\}$ *не когомологично* 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oseledets V. I.* Classification of GL(2,R)-valued cocycles of dynamical systems. Report № 360. Bremen: Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen, 1995.
2. *Thieullen Ph.* Ergodic reduction of random products of two-by-two matrices. — J. Anal. Math., 1997, v. 73, p. 19–64.
3. *Arnold L.*, *Nquyen D. C.*, *Oseledets V. I.* Jordan normal form for linear cocycles. — Random Op. Stoch. Eq., 1999, v. 7, № 4, p. 303–358.
4. *Липатов М. Е.* Рекуррентность матричных коциклов. — Вестн. Моск. ун-та. сер. 1. Матем. Механ., 2010, № 5, с. 61–64.