И. И. Голичев (Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН). **Градиентные методы решения уравнений Навье–Стокса.**

В работе, представленной данным докладом, рассматривается несколько вариантов комбинации итерационных методов линеаризации задачи и градиентных методов решения как линеаризованных задач, так и непосредственно нелинейной задачи Навье–Стокса. Далее будем использовать обозначения, введенные в работе [1].

1. Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщенной системы уравнений Навье–Стокса

$$L\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + v_i\mathbf{v}_{x_i} = -\operatorname{grad} p + f(x,t), \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_S = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

в области $Q_T = \Omega\times[0,T]$, $S_T = S\times[0,T]$, S — граница области Ω, $f\in J(Q_T)$, $L_2(Q_T) = G(Q_T)\oplus J(Q_T)$ — ортогональное разложение на градиентную и солиноидальную составляющие части пространства $L_2(Q_T)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$,

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}|_S = 0. \tag{4}$$

Будем предполагать, что решение задачи (1)–(3) существует, $\mathbf{v}\in Z = Z(Q_T) = L_2(0,T;W_2^{2,\,1}(Q_T))\cap L_\infty(0,T;W_2^{1,\,0}(Q_T))$, $p_x\in L_2(Q_T)$. Используя априорную оценку решения

$$\|\mathbf{v}_x(x,t)\| \leqslant M(t) \leqslant M_0 \ \forall\ t\in[0,T], \tag{5}$$

в работах [2, 3] построены итерационные процессы линеаризации задачи (1)–(3), сходящиеся с любого начального приближения. Например, один из вариантов линеаризации имеет вид

$$L\,\mathbf{v}^m \equiv \mathbf{v}_t^m - \nu\Delta\,\mathbf{v}^m + \tilde{v}_i^{m-1}\,\mathbf{v}_{x_i}^m = -\operatorname{grad} p^m + f(x,t), \tag{6}$$

с условиями (2)–(3) на $\mathbf{v}^m$, где $\tilde{\mathbf{v}}^{m-1} = \lambda(t,\mathbf{v}^{m-1})$, $\lambda(t,\mathbf{v}) = \min\{1, M(t)\|\mathbf{v}_x(x,t)\|^{-1}\}$.

2. Задачу (1)–(3) рассматриваем как обратную задачу определения $\mathbf{v}$ и p по дополнительным данным (3). Основным способом решения обратных задач является сведение их к задачам оптимального управления. Рассмотрим два варианта таких задач.

Задача I. Найти минимум функционала $J(u) = \int_{Q_T}|\operatorname{div}\mathbf{v}(u)|^2\,dx\,dt$ на множестве $U_1 = G(Q_T)$, где $\mathbf{v}(u)$ — решение задачи $L\,\mathbf{v}\equiv f-u$ с условиями (2).

Задача II. Найти минимум функционала $J(u)$ на множестве $U_2 = \{u\in W_2^{1,0}(Q_T)\colon \int_\Omega u(x,t)\,dx = 0\}$, где $\mathbf{v}(u)$ – решение задачи $L\,\mathbf{v} = f - \operatorname{grad} u$.

Для решения задач I, II можно использовать метод проекции градиента

$$u^k = P_{U_l}(u^{k-1} - \alpha_k J_l'(u^{k-1})), \qquad l = 1,2, \tag{7}$$

где P_{U_l} — оператор проектирования на множество U_l.

Градиент функционала $J(u)$ на множестве U_l определяется по формулам

$$J_1'(u) = \mathbf{w}(u), \quad J_2'(u) = -\operatorname{div}\mathbf{w}(u), \tag{8}$$

где $\mathbf{w}(u)$ — сопряженное состояние, определяемое для обеих задач соотношениями

$$L^*\mathbf{w}(u) = -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - v_i(u)\mathbf{w}_{x_i} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}(u), \tag{9}$$

$$\mathbf{w}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{w}(x,T) = 0. \tag{10}$$

Предположим, что выполнено следующее условие.

A) Решение задачи $L\,\mathbf{v} = f$, $\mathbf{v}|_{S_T} = 0$, $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x)$ при любом $f \in L_2(Q_T)$ имеет априорную оценку (5).

Обозначим $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}(u_k)$ — решение задачи

$$L\,\mathbf{v}^k = -u^k + f, \quad \mathbf{v}^k\,|_{\,S_T} = 0, \quad \mathbf{v}^k|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{11}$$

$\mathbf{w}^k$ — решение задачи

$$-\mathbf{w}^k_t - \nu\Delta\,\mathbf{w}^k - v^k_i\mathbf{w}^k_{x_i} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}(u_k), \quad \mathbf{w}^k|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{w}(x,T) = 0, \tag{12}$$

Тогда итерационный процесс (8) при $l = 1$ примет вид

$$u^k = P_{U_1}(u^{k-1} - \alpha_k\mathbf{w}^{k-1}). \tag{13}$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* A), *тогда градиент* $J_1'(u)$ *функционала* $J(u)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* L *и последовательность* $\{u_k\}$, *определенная соотношениями* (11)–(13), *где*

$$0 < \varepsilon_0 \leqslant \alpha_k \leqslant 2(L + 2\varepsilon)^{-1}, \tag{14}$$

имеет предел u^*, $\lim_{k\to\infty}\|u^k - u^*\|_{L_2(Q_T)} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{v}(u^*) = 0$, $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}^*\||_Z = 0$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}(u^*)$.

З а м е ч а н и е 1. В случае, если константу L найти трудно, условие (14) можно заменить следующим: $\lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0$, $\alpha_k > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 = \infty$.

З а м е ч а н и е 2. Методы получения априорной оценки (14) даны, например, в [1, гл. VI, §4].

3. При решении линеаризованной задачи (6), (2), (3) в уравнении (6) опускаем индекс m и обозначим $v_i^{m-1} = g_i(x,t)$, $Lv = \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i}$, $L^*\mathbf{w} = -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - (g_i\mathbf{w})_{x_i}$. Тогда решение линейной задачи (6), (2), (3) можно найти при помощи итерационного процесса (11)–(13). Используя тот факт, что в данном случае функционал $J(u)$ выпуклый, можно обеспечить более быструю сходимость итерационного процесса (11)–(13) за счет выбора параметров α_k. Например, можно обосновать метод наискорейшего спуска, при этом параметры α_k определяются по формуле $\alpha_{k+1} = \int_{Q_T}\operatorname{div}\mathbf{v}^k\operatorname{div}\mathbf{z}^k\,dx\,dt/\int_{Q_T}|\operatorname{div}\mathbf{z}^k|^2\,u_k\,dx\,dt$, где $\mathbf{z}^k$ — решение задачи $L\mathbf{z}^k = \mathbf{w}^k$, $\mathbf{z}^k|_{S_T} = 0$, $\mathbf{z}^k|_{t=0} = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, 288 с.
2. *Голичев И.И.* Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989, 172 с.
3. *Голичев И. И.* Итерационные методы решения уравнений Навье–Стокса как задачи оптимального управления. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2008, т. 15, в. 2, с. 280–282.