А. Н. Голиков (Таганрог, ФГБОУ ВПО ТГПИ). **Кусочно-полиномиальное приближение функций двух переменных, частных производных и двойных интегралов на основе интерполяционных полиномов Ньютона.**

Строится компьютерная схема кусочно-полиномиальной аппроксимации функции двух переменных на основе интерполяционного полинома Ньютона с прямоугольной системой узлов интерполяции. Область определения $G = \{(x,y)\colon\ x \in [a,b],\ y \in [c,d]\}$ из $\mathbf{R}^2$ функции $z = f(x,y)$, $z \in \mathbf{R}$, разбивается на прямоугольные подобласти $G = \cup_{\widetilde{k}=1}^{P_x P_y} G_{\widetilde{k}}$, $P_x = (b-a)/(Mh_x)$, $P_y = (d-c)/(Kh_y)$, внутри каждой из которых на множестве узлов $\widetilde{G}_{\widetilde{k}} = \{(x_{i-1,l}, y_{j-1,m})\}\colon\ x_{i-1,l} = x_{i-1} + lh$, $y_{j-1,m} = y_{j-1} + mg$, $l = 0,1,\ldots,M$, $m = 0,1,\ldots,K\}$ строится полином Ньютона для интерполяции вверх–вправо:

$$P_{\widetilde{k}}(x,y) = f(x_{i0}, y_{j0}) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \frac{\Delta^{m+k}_{x^m y^k} f(x_{i0}, y_{j0})}{k!\, h^k m!\, g^{m-k}} \prod_{i'=0}^{m} (x - x_{i'}) \prod_{j'=0}^{k} (y - y_{j'}). \tag{1}$$

Полином (1) преобразуется по дистрибутивности к каноническому виду

$$P_{\widetilde{k}}(x,y) = \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=0}^{K} A_{\widetilde{k},mk} t^k u^m, \tag{2}$$

при помощи выражения коэффициентов полинома через корни по схеме из [1]. Аппроксимация часто повторяющейся функции полиномами (2) при условии хранения коэффициентов выполняется по схеме Горнера для двух переменных за время $t(1) = MK(t_y + t_c)$, где t_y, t_c — время бинарного умножения и сложения соответственно. Частные производные функции f аппроксимируются частными производными от полинома (2), двойной интеграл от функции f по области G — при помощи первообразной от этого же полинома. Граница абсолютной погрешности аппроксимации функций задается априори. Согласно эксперименту, на практике она не превосходит 10^{-15}, для частных производных первого порядка не более 10^{-12}, частных производных второго порядка — 10^{-9}, значения двойных интегралов аппроксимируются с погрешностью не более 10^{-18}.

Схема допускает уточнение, заключающееся в следующем. После построения полинома (1) на соответствующей подобласти строится и приводится к виду (2) аналогичный полином $P^*_{\widetilde{k}} = \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=0}^{K} B_{\widetilde{k},mk} t^k u^m$ с диагонально противоположным начальным узлом интерполяции и обратными направлениями интерполирования. За интерполирующий полином принимается полином вида $P^*_{\widetilde{k}} = \sum_{m=0}^{M} \sum_{k=0}^{k} C_{\widetilde{k},mk} t^k u^m$, где $C_{\widetilde{k},mk} = (A_{\widetilde{k},mk} + B_{\widetilde{k},mk})/2$, $\widetilde{k} = 0,1,\ldots,P_x P_y$, $m = 0,1,\ldots,M$, $k = 0,1,\ldots,K$. Частные производные и двойные интегралы вычисляются аналогично предыдущему. В результате граница абсолютной погрешности аппроксимации снижается на 1–2 порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ромм Я. Е.* Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II. — Кибернетика и системный анализ, 2007, № 2, с. 161–174.