Ю. Е. М а л а ш е н к о, А. Ф. Р о н ж и н (Москва, ВЦ РАН). **О пребывании в когерентной системе задач со случайным временем решения.**

Пусть в систему на обработку поступает пакет из $n \geqslant 2$ задач. При полном владении ресурсом системы i-я задача решается за некоторое время X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Априори время решения задач неизвестно.

Следуя [1,2], *планом выполнения пакета задач* будем называть набор из n векторов $r_i = (r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, \ldots, r_n^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в котором $r_\nu^{(i)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — доля ресурса, выделяемая ν-й задаче при запуске пакета на обработку, а $r_\nu^{(i+1)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — доля ресурса, выделяемая ν-й задаче после того, когда завершено решение i задач. Регулярные планы выполнения пакета задач будем определять следующим образом. Зафиксируем натуральное число k: $1 \leqslant k \leqslant n$. Из имеющегося пакета выберем случайным образом k задач, разделим ресурс на k частей и начнем обрабатывать отобранные задачи одновременно. После окончания решения одной или нескольких задач освободившийся ресурс разделим поровну на все незавершенные задачи и продолжим их обработку. Будем продолжать процесс до тех пор, пока все k задач не будут решены. После этого описанная процедура повторяется до тех пор, пока общий список имеющихся задач не будет исчерпан.

Характеристики современных высокопроизводительных вычислительных систем позволяют в расчетах полагать, что ресурс и любая его часть кратны n, аналогично предполагается делимость рассматриваемых задач на произвольное число независимых вычислительных ветвей.

Далее рассмотрим два граничных плана при $k = 1$ и $k = n$. При этом 1-регулярный план будем называть *последовательным*, а n-регулярный — *параллельным*. Очевидно, что общее время решения всех задач пакета не зависит от плана и равно $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = S^\pi$.

Будем полагать, что времена решения задач $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ есть случайная выборка из значений случайной величины $\xi(w)$ с функцией распределения $F(x)$. По смыслу $F(0) = 0$ и, следовательно, существует математическое ожидание $\mathbf{M}\,\xi$. Пусть оно конечно. Для любого плана π и $x > 0$ обозначим $t_\pi(x)$ условное математическое ожидание времени пребывания в системе k-й задачи при условии, что ее длина есть x: $t_\pi(x) = \mathbf{M}\,(t^\pi_{x_k} \,|\, X_k = x)$.

Последовательный план $\pi = seq$ предполагает случайный выбор порядка выполнения заданий. Условное математическое ожидание времени пребывания в системе k-й задачи при равномерной мере на всех возможных перестановок координат вектора равно $(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/2 + X_k/2 = (S^\pi - X_k)/2 + X_k$. Для любого плана время завершения k задач удовлетворяет неравенству $t_k^{(\pi)} \geqslant X_{i_1} + X_{i_2} + \cdots + X_{i_k} \geqslant X_1^* + X_2^* + \cdots + X_k^*$, где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера решения первых задач для данного плана и $X_1^* \leqslant X_2^* \leqslant \cdots \leqslant X_n^*$ — вариационный ряд значений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Отсюда следует, что всегда среднее время пребывания задач в системе удовлетволяет неравенству $\widehat{T}^\pi := n^{-1}\sum_{k=1}^n t_k^{(\pi)} \geqslant n^{-1}\sum_{k=1}^n (n-k+1)X_k^* = S^\pi - n^{-1}\sum_{k=1}^n (k-1)X_k^*$.

Применяя лемму из [1] о представлении для второго слагаемого из правой части последнего равенства, для любого плана получим неравенства

$$\mathbf{M}\,\widehat{T}^\pi \geqslant \mathbf{M}\,\xi + \frac{n-1}{2}\mathbf{M}\,\xi - \mathbf{M}\,\max\{\xi_1, \xi_2\} = \mathbf{M}\,\xi + \frac{n-1}{2}\mathbf{M}\,\min\{\xi_1, \xi_2\},$$

где ξ_1, ξ_2, ξ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Кроме того, в силу равенства $\mathbf{M}\,\max\{\xi_1, \xi_2\} = 2\mathbf{M}\,\xi - \mathbf{M}\,\min\{\xi_1, \xi_2\}$ и утверждения теоремы из [1] можно записать в виде

$$\mathbf{M}\,\widehat{T}^{par} = \mathbf{M}\,\xi + (n-1)\mathbf{M}\,\min\{\xi_1, \xi_2\}, \quad \mathbf{M}\,\widehat{T}^{seq} = \mathbf{M}\,\xi + [(n-1)/2]\,\mathbf{M}\,\xi.$$

Выделим класс планов, которые всегда «пропускают маленькие задания вперед», т. е. k-я задача при $X_k \leqslant X_l$ решается не позже l-й задачи. Обозначим P класс таких планов.

Теорема. *Для любого плана* π *из класса* P: $\mathbf{M}\, t_\pi(x) \geqslant x + (n-1)\int_0^x y\, dF(y)$.

Для параллельного плана: $\mathbf{M}\, t_{par}(x) = x + (n-1)\int_0^x (1 - F(y))\, dy$.

Для последовательного плана: $\mathbf{M}\, t_{seq}(x) = x + [(n-1/2]\,\mathbf{M}\,\xi$.

Следствие. *Пусть* ξ *имеет равномерное распределение на отрезке* $[0,1]$. *Тогда для положительных* x *справедливы соотношения*:

$$\frac{1}{x}\mathbf{M}\, t_\pi(x) \geqslant 1 + \frac{n-1}{2} \text{ \textit{для любого плана} } \pi \text{ \textit{из класса} } P,$$

$$\frac{1}{x}\mathbf{M}\, t_{par}(x) = 1 + \frac{n-1}{2}(2-x), \quad \frac{1}{x}\mathbf{M}\, t_{seq}(x) = 1 + \frac{n-1}{4x}.$$

Графики $t_{seq}(x)$ *и* $t_{par}(x)$ *пересекаются при значении* x, *которое удовлетворяет уравнению* $1/(2x) = 2 - x$, *т. е. в точке* $x = (2-\sqrt{2})/2 \approx 0,292$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ronzhin A. F.*, *Golosov P. E.* Regular Plans of Execution of Tasks with Random Processing Time. — The 7th International Conference on Mathematical Methods in Reliability: Theory. Methods. Applications (MMR2011). Beijng: Beijng Institute of Technology Press, 2011, p. 477–480.
2. *Голосов П. Е.*, *Козлов М. В.*, *Малашенко Ю. Е.*, *Назарова И. А.*, *Ронжин А. Ф.* Анализ управления специальными вычислительными заданиями в условиях неопределенности. — Известия РАН. Теория и системы управления, 2011, № 6, с. 63–79.