Ю. В. Г а л у ш к о (Москва, МГУ). **О задаче максимизации полезности в некоторой общей модели неполного рынка.**

Пусть заданы вероятностное пространство (Ω, F, P) и выпуклый конус $\mathcal{A} \subseteq L^0(P)$, состоящий из ограниченных снизу случайных величин, интерпретируемых как множество возможных прибылей инвестора. Четверку $(\Omega, F, P, \mathcal{A})$ будем называть *рынком*. Под задачей максимизации полезности понимается задача нахождения функции $u(x) = \sup_{\xi \in \mathcal{A}} E_Q U(x+\xi)$, где U — некоторая функция полезности, x — начальный капитал, а также нахождения такого элемента ξ из множества $\mathcal{A}$, на котором достигается верхняя грань.

Вероятностная мера $\overline{P}$, абсолютно непрерывная относительно меры P ($\overline{P} \ll P$), называется *разделяющей* (*риск-нейтральной*) *мерой*, если $E_{\overline{P}}\xi \leqslant 0$ для любой $\xi \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C} = \{\eta \in L^\infty(P)\colon\ \eta \leqslant \xi$ для некоторого $\xi \in \mathcal{A}\}$.

Рынок назовем *замкнутым*, если для любой монотонно возрастающей последовательности $\xi_n \in \mathcal{C}$ найдется $\eta \in \mathcal{A}$, для которой $\lim_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \eta$. Рынок называется *полным*, если существует единственная эквивалентная разделяющая мера.

Мы рассматриваем модель рынка, состоящую из двух этапов. На каждом из этапов рынок является полным (и замкнутым), но рынок на втором этапе определяется некоторой характеристикой, значение которой становится известным после первого этапа. Математически рассматриваемая модель рынка описывается следующим образом.

На первом этапе рынок предполагается полным и замкнутым и задается четверкой $(\Omega_1, F_1, P_1, \mathcal{A}_1)$. Единственную эквивалентную разделяющую меру обозначим $\overline{P}_1$. Множество возможных значений изменяемой характеристики лежит во множестве N, снабженном σ-алгеброй E. Характеристика определяется случайным образом, причем допускается зависимость от состояния рынка на первом этапе, что описывается марковским ядром $K(\omega_1, d\eta) =: K^\omega(d\eta)$ из (Ω_1, F_1) в (N, E).

Для описания второго этапа для каждых $\omega_1 \in \Omega_1$ и $\eta \in N$ задается полный и замкнутый рынок $(\Omega_2, F_2, P_2^{\omega_1,\eta}, \mathcal{A}_2^{\omega_1,\eta})$, где $P_2(\omega_1, \eta; d\omega_2) =: P_2^{\omega_1,\eta}(d\omega_2)$ — марковское ядро из $(\Omega_1 \otimes N, F_1 \otimes E)$ в измеримое пространство (Ω_2, F_2). Таким образом, допускается зависимость рынка на втором этапе не только от характеристики, но и от состояния рынка на первом этапе.

Определим $\mathcal{A}_2$ как множество таких равномерно ограниченных снизу измеримых по совокупности переменных случайных величин $\xi_2(\omega_1, \eta, \omega_2)$, что для $K^{\omega_1}(d\eta)P_1(d\omega_1)$-п. в. пар (ω_1, η) функции $\xi_2(\omega_1, \eta, \cdot)$ лежат в $\mathcal{A}_2^{\omega_1,\eta}$.

В итоге рынок $(\Omega, F, P, \mathcal{A})$ в этой общей задаче задается следующим образом: $\Omega := \Omega_1 \otimes N \otimes \Omega_2$, $F := F_1 \otimes E \otimes F_2$, $P(d\omega_1, d\eta, d\omega_2) := P(d\omega_1)K^{\omega_1}(d\eta)P_2^{\omega_1,\eta}(d\omega_2)$, а множество прибылей $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 := \{\xi_1(\omega_1) + \xi_2(\omega_1, \eta, \omega_2)\colon\ \xi_1 \in \mathcal{A}_1,\ \xi_2 \in \mathcal{A}_2\}$.

При дополнительном предположении, что существует такая измеримая по совокупности переменных случайная величина $Z(\omega_1, \eta, \omega_2) > 0$, что для $K^{\omega_1}(d\eta)P_1(d\omega_1)$-п. в. пар (ω_1, η) верно соотношение $Z(\omega_1, \eta, \cdot) = d\overline{P}_2^{\omega_1,\eta}/dP_2^{\omega_1,\eta}$, где $\overline{P}_2^{\omega_1,\eta}$ — единственная разделяющая мера, эквивалентная мере $P_2^{\omega_1,\eta}$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Мера $\overline{P}$ на рынке $(\Omega, F, P, \mathcal{A})$ является разделяющей тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $\overline{P}(d\omega_1, d\eta, d\omega_2) = \overline{P}_1(d\omega_1)R^{\omega_1}(d\eta)\overline{P}_2^{\omega_1,\eta}(d\omega_2)$, где R^{ω_1} — такое ядро из (Ω_1, F_1) в (N, E), что для $\overline{P}_1$-п. в. ω_1 мера R^{ω_1} абсолютно непрерывна относительно меры K^{ω_1}.*

Предполагается, что функция полезности $U(x)\colon \mathbf{R} \to [-\infty, +\infty)$ принимает конечные значения на $(0, +\infty)$ и равна $-\infty$ на $(-\infty, 0)$, является строго возрастающей на $[0, +\infty)$, строго выпуклой и дифференцируемой на $(0, +\infty)$, выполнены условия Инада: $\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$, а также выполнено условие на асимптотическую эластичность: $AE(U) := \lim_{x\to\infty} \sup\{xU'(x)/U(x)\} < 1$.

Таким образом, при введенных выше предположениях задачу максимизации ожидаемой полезности на всем рынке можно записать следующим образом. Требуется найти такую стратегию $\xi_1^*(\omega_1) + \xi_2^*(\omega_1, \eta, \omega_2) \in \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$, на которой достигается верхняя грань для $u(x)$, равная

$$\sup_{\xi_1(\omega_1)+\xi_2(\omega_1,\eta,\omega_2)\in\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2} \int_{\Omega_1}\int_N\int_{\Omega_2} U(x+\xi_1(\omega_1)+\xi_2(\omega_1,\eta,\omega_2))P_2^{\omega_1,\eta}(d\omega_2)K^{\omega_1}(d\eta)P_1(d\omega_1).$$

При дополнительном предположении, что функция $u(x) < \infty$ хотя бы для одного $x > 0$, рассмотрим вспомогательные функции.

1) Функция $u_1(\omega_1, \eta, y) = \sup_{\xi_2\in\mathcal{A}_2^{\omega_1,\eta}} \int_{\Omega_2} U(y + \xi_2(\omega_2))P_2^{\omega_1,\eta}(d\omega_2)$ — функция ожидаемой полезности для рынка на втором этапе с фиксированным начальным капиталом y.

Пусть $\xi_2^* \in \mathcal{A}_2$, $\xi_2^* = \xi_2^*(\omega_1, \eta, \omega_2; y)$ — прибыль, соответствующая оптимальной стратегии для данной задачи.

2) Определим функцию $u^*(\omega_1, y) = \int_N u_1(\omega_1, \eta, y)K^{\omega_1}(d\eta)$, которая будет играть роль функции полезности, зависящей от случая на следующем шаге, отвечающем первому этапу.

3) Определим функцию $u_2(x) = \sup_{\xi_1\in\mathcal{A}_1} \int_{\Omega_1} u^*(\omega_1, x + \xi_1(\omega_1))P_1(d\omega_1)$. Пусть $\xi_1^* \in \mathcal{A}_1$ — прибыль, соответствующая оптимальной прибыли для такой задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнены указанные выше предположения на рынок, тогда стратегии ξ_1^*, ξ_2^* существуют, $\xi_1^*(\omega_1) + \xi_2^*(\omega_1, \eta, \omega_2; x + \xi_1^*(\omega_1)) \in \mathcal{A}$ является оптимальной стратегией для максимизируемой функции $u(x)$ и при этом $u_2(x) = u(x)$.*

Решение задачи максимизации полезности в семимартингальной модели рынка (как полного, так и неполного) было дано в работе [2], при этом многие результаты были доказаны, по существу, в общей модели рынка. В случае неполного рынка подход в работе [2] состоит в предварительном решении двойственной задачи, через которое характеризуется решение исходной задачи. Особенность данного сообщения заключена в том, что рассматривается некоторая общая модель неполного рынка, в которой не требуется решение двойственной задачи.

В доказательстве теоремы 2 используются результаты, полученные ранее в статье [1] о максимизации полезности в общей модели полного рынка в ситуации, когда функция полезности U может зависеть от случая не только через прибыль ξ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галушко Ю. В.* О задаче максимизации полезности в общей модели полного рынка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 6, с. 1005–1014.
2. *Kramkov D.*, *Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in complete markets. — The Annals of Applied Probability, 1999, v. 9, № 3, p. 904–950.