

**З. И. Бежаева, В. И. Оселедец** (Москва, МИЭМ, АБИК и МГУ). **Вычисление энтропии скрытой марковской цепи с одним «немарковским» состоянием.**

Рассмотрим стационарный марковский источник  $\{X_n\}$  с алфавитом  $\{0, 1, \dots, L-1\}$ , переходной матрицей  $P$  и стационарным распределением  $l$  ( $lP = l$ ). Скрытая марковская цепь  $\{Y_n\}$  с алфавитом  $\{0, 1, \dots, Q-1\}$  возникает из марковской цепи при передаче через канал. Канал определяется переходными вероятностями  $p_a(b) = \text{Prob}\{Y_n = a | X_n = b\}$ ,  $a \in \{0, 1, \dots, Q-1\}$ ,  $b \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ .

Введем диагональные матрицы  $D_a$ ,  $a \in \{0, 1, \dots, Q-1\}$  с диагоналями  $\{p_a(0), p_a(1), \dots, p_a(Q-1)\}$ . Пусть  $E_a = D_a P$ . Тогда  $\text{Prob}\{Y_1 = a_1, Y_2 = a_2, \dots, Y_n = a_n\} = l E_{a_1} E_{a_2} \dots E_{a_n} r$ , где все элементы столбца  $r$  равны 1.

В [2] был рассмотрен пример, в котором  $Q = L$  и  $\text{Prob}\{Y_n = 0 | X_n = 0\} = 1$ ,  $\text{Prob}\{Y_n = 0 | X_n = b\} = \varepsilon_b$ ,  $\text{Prob}\{Y_n = b | X_n = b\} = 1 - \varepsilon_b$ ,  $b \neq 0$ . В этом примере у матриц  $E_a$ ,  $a \neq 0$ , все строки, за исключением одной строки, равны нулю и  $0 < \varepsilon_b < 1$ .

В [2] была получена формула типа формулы Блэкуэла [1] для энтропии скрытой марковской цепи в предположении, что все элементы матрицы  $P$  положительны. Эффективность этой формулы была показана в [2] на двух конкретных примерах.

Мы получили другую эффективную формулу для энтропии скрытой марковской цепи из [2] при более слабом предположении ( $P$  — неприводимая матрица).

Энтропия скрытой марковской цепи  $h = -\sum_{i,n,j} (\ln(v_i E_0^n u_j)) v_i E_0^n u_j l u_i (1 - \varepsilon_j)$ , где  $v_i$  ( $i = 1, 2, \dots, Q-1$ ) — это ненулевая строка матрицы  $E_i$ , а  $u_j$  — это столбец длины  $Q$ , в котором на месте с номером  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, Q-1$ ) стоит 1, а на остальных местах стоят нули.

В конкретном примере из [2] первая строка матрицы  $P$  равна  $(0, 4, 0, 25, 0, 35)$ , вторая строка равна  $(0, 25, 0, 45, 0, 3)$  и третья строка равна  $(0, 2, 0, 55, 0, 25)$ , а вероятности ошибок равны  $\varepsilon_1 = 0,01$ ,  $\varepsilon_2 = 0,02$ . Численный счет по нашей формуле для этого примера из [2] дает  $h = 1,0542407243824958$ , что не совпадает со значением из [2].

Работа авторов была частично поддержана РФФИ, проект № 11-01-00982.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blackwell D.* The entropy of functions of finite-state Markov chains. — In: Trans. of the 1st Prague Conference: Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, 1957, p. 13–20.
2. *Marchand K., Mulherkar J., Nachtergaele B.* Entropy rate calculations of algebraic measures. arxiv: 1105.23, 12 may 2011.