Б. М. Г у р е в и ч (Москва, МГУ, ИППИ РАН). **Асимптотические свойства равновесных мер, отвечающих последовательностям конечных подматриц бесконечной неотрицательной матрицы.**

Известная в теории цепей Маркова классификация стохастических матриц (невозвратные, возвратные нулевые, возвратные положительные) была обобщена в [1] на произвольные неотрицательные матрицы. В дальнейшем она была уточнена путем разбиения класса возвратных положительных матриц на подклассы устойчиво возвратных и неустойчиво возвратных (см. [2]).

Следующие определения и дальнейшие подробности можно найти в [3].

Пусть $A = (a_{ij})$ $(a_{ij} \geqslant 0)$ — неразложимая конечная или бесконечная матрица. Назовем *весом последовательности* (*слова*) $w = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ длины $n+1$ число $a_{i_0,i_1} \dots a_{i_{n-1},i_n}$. При $i = 1, 2, \dots$ введем производящую функцию φ_i последовательности $\{a_i^{(n)}, n \geqslant 1\}$, где $a_i^{(n)}$ — сумма весов всех слов длины $n+1$ с началом и концом i, внутри которых i не встречается. Пусть r_i — радиус сходимости ряда φ_i. Будем всегда предполагать, что $r_i > 0$ (это свойство не зависит от i). Матрица A называется *положительно возвратной*, если найдется такое i, что либо $\varphi_i(r_i) > 1$, либо $\varphi_i(r_i) = 1$, $\varphi_i'(r_i) < \infty$. В первом случае A называется *устойчиво возвратной*, во втором — *неустойчиво возвратной*. Всякая конечная матрица устойчиво возвратна.

Известно, что для каждой положительно возвратной матрицы A найдутся такие векторы $x > 0$ и $y > 0$, что $\langle x, y \rangle = 1$ и $Ax = \lambda x$, $A^* y = \lambda y$, где $\lambda = \lambda(A)$ — точная верхняя грань максимальных собственных чисел (чисел Перрона) конечных подматриц матрицы A. Теперь можно построить цепь Маркова с переходными вероятностями $p_{ij} = a_{ij} x_j / (\lambda x_i)$, $i, j = 1, 2, \dots$, и стационарным распределением $\pi_i = x_i y_i$, $i = 1, 2, \dots$ Соответствующая инвариантная относительно сдвига марковская мера μ_A на пространстве бесконечных последовательностей удовлетворяет некоторому вариационному принципу и называется *A-равновесной мерой*.

Возрастающую последовательность неразложимых конечных подматриц A_n бесконечной матрицы $A = (a_{ij})$ назовем *исчерпывающей*, если каждый элемент a_{ij} становится, начиная с некоторого n, элементом матрицы A_n.

Представляет интерес вопрос о поведении последовательностей μ_{A_n} при $n \to \infty$ для различных классов матриц A (заметим, что пространство, на котором эти меры естественным образом определены одновременно при всех n, некомпактно). Ответ на этот вопрос известен для большинства классов матриц A: если A невозвратная или возвратная нулевая, то μ_{A_n} слабо сходится к нулевой мере, а если A устойчиво возвратная, то — к равновесной мере μ_A. Можно предположить, что в классе неустойчиво возвратных матриц, пограничном между классами устойчиво возвратных и возвратных нулевых, будут в каком-то смысле совмещаться свойства двух последних. Хотя вопрос до конца не решен, можно описать подкласс этого класса, в пределах которого высказанная гипотеза справедлива. Это описание удобно дать в геометрических терминах.

Точно так же, как это делается в теории цепей Маркова для стохастических матриц, по каждой неотрицательной матрице A можно построить ориентированный граф G_A, *структурный граф* этой матрицы. Назовем граф G_A *связкой каскадных графов*, если он представляет собой объединение конечного связного подграфа H (основы связки) и бесконечного числа несамопересекающихся путей конечной длины с началом и концом в H, которые не проходят через H (в промежутке между началом и концом) и каждые два из которых могут иметь в качестве общих вершин только начала и концы.

Следующий результат получен совместно с О. Р. Новокрещеновой.

Теорема. *Если структурный граф неустойчиво возвратной матрицы A представляет собой связку каскадных графов, то у A найдутся такие две исчерпывающие последовательности конечных подматриц A_n и B_n, что* $\lim_{n\to\infty} \mu_{A_n} = \mu_A$,

$\lim_{n\to\infty} \mu_{B_n} = 0$.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 11-01-00982.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vere-Jones D.* Ergodic properties of nonnegative matrices. I. — Pacific. J. Math., 1967, v. 22, № 2, p. 361–386.
2. *Гуревич Б. М.* Устойчиво-возвратные неотрицательные матрицы. — Успехи матем. наук, 1996, т. 51, в. 3, с. 195–196.
3. *Гуревич Б. М.*, *Савченко С. В.* Термодинамический формализм для счетных символических цепей Маркова. —Успехи матем. наук, 1998, т. 53, в. 2, с. 3–106.