С. В. Стафеев (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **О структурной идентифицируемости модели факторного анализа с зависимыми остатками.**

Рассмотрим вероятностно-статистическую модель $\mathcal{M}(\Theta)$, заданную семейством распределений $\{\mathbf{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$. Модель $\mathcal{M}(\Theta)$ называется *глобально идентифицируемой*, если любым различным $\theta \in \Theta$ и $\theta' \in \Theta$ соответствуют различные распределения $\mathbf{P}_\theta$ и $\mathbf{P}_{\theta'}$. Модель $\mathcal{M}(\Theta)$ называется *почти всюду* (п. в.) *глобально идентифицируемой*, если она является глобально идентифицируемой при $\theta \in \Theta'$, а множество $\Theta \setminus \Theta'$ имеет меру нуль [1].

Пусть $\mathbf{G}$ — некоторое множество структур. Модели $\mathcal{M}(\Theta_{G_1})$ и $\mathcal{M}(\Theta_{G_2})$, $G_1, G_2 \in \mathbf{G}$, назовем *непересекающимися*, если не пересекаются соответствующие им семейства распределений. Модель $\mathcal{M}(\Theta_G)$, $G \in \mathbf{G}$, называется *структурно идентифицируемой*, если любым различным $G_1 \in \mathbf{G}$ и $G_2 \in \mathbf{G}$ соответствуют непересекающиеся модели $\mathcal{M}(\Theta_{G_1})$ и $\mathcal{M}(\Theta_{G_2})$. Модель $\mathcal{M}(\Theta_G)$, $G \in \mathbf{G}$, называется *п. в. структурно идентифицируемой*, если модель $\mathcal{M}(\Theta'_G)$, $G \in \mathbf{G}$, структурно идентифицируема, а множества $\Theta_G \setminus \Theta'_G$, $G \in \mathbf{G}$, имеют меру нуль.

Проблема параметрической и структурной идентифицируемости особенно актуальна для моделей, содержащих латентные переменные. В докладе рассматривается модель факторного анализа с зависимыми остатками содержащей n наблюдаемых случайных величин и k факторов [2]. Данная модель соответствует семейству нормальных распределений с $(n \times n)$-матрицей ковариаций Σ, допускающей следующее разложение:

$$\Sigma = AA^t + \Psi_G, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})$ есть $(n \times k)$-матрица факторных нагрузок, $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством ребер E, $\Psi_G = (\psi_{ij})$ есть $(n \times n)$-матрица ковариаций вектора остатков, причем $\psi_{ij} = 0$, если $(i, j) \notin E$. Множество параметров модели (1) состоит из матрицы факторных нагрузок A и ненулевых элементов матрицы Ψ_G.

Пусть $\overline{G} = (V, \overline{E})$ — дополнительный к G граф. Образуем граф $\mathfrak{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где $\mathbf{V} = \{\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k)\colon 1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant k\}$, а $\mathbf{E} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j})\colon \mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k),\ \mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_k),\ (i_s, j_l) \in \overline{E},\ s, l = 1, 2, \dots, k\}$.

Теорема 1. *Если граф $\mathfrak{G}$ содержит компоненту связности $\mathfrak{G}' = (\mathbf{V}', \mathbf{E}')$ с нечетным простым циклом и $\cup_{\mathbf{i} \in \mathbf{V}'} \mathbf{i} = V$, то модель* (1) *является п. в. глобально идентифицируемой.*

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 4k + 1$ и пусть $\mathbf{T}$ — множество всех деревьев с множеством вершин V. Тогда модель* (1) *при $G \in \mathbf{T}$ является п. в. структурно идентифицируемой.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Allman E.*, *Matias C.*, *Rhodes J.* Identifiability of parameters in latent structure models with many observed variables. — Annals of statistics, 2009, v. 37, p. 3099–3132.
2. *Стафеев С. В.* О модели факторного анализа с зависимыми остатками. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 6, с. 1058–1064.