А. Ю. Голубин, **В. Н. Гридин** (Одинцово, ЦИТП РАН)**. Построение оптимальных стратегий страхования и перестрахования в процессе риска с дополнительными ограничениями на риски страховщика.**

1. Описание модели Объект изучения — управляемый процесс риска Крамера–Лундберга, описывающий динамику капитала страховой компании (см., например, [1]):

$$X_t = x_0 + \int_0^t c_s\,ds - \sum_{j=1}^{N(t)} A_{t_{j-1}}(I_{t_{j-1}}(Y_j)), \tag{1}$$

где $x_0 > 0$ — начальный капитал, $\{Y_i\}$ — н. о. р. страховые выплаты с функцией распределения $F(x)$ и конечным вторым моментом $\mathbf{E}\,Y^2 < \infty$. Процесс исков на выплаты, т. е. число страховых случаев $\{N(t)\}$ есть такой неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$, что интегральная интенсивность $\Lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \lambda(x)\,dx \to \infty$ при $t \to \infty$. Размеры премий, получаемых страховщиком и перестраховщиком на $[0,t]$, определяются принципом среднего значения [1]. С учетом перестрахования скорость накопления остающейся у страховщика премии

$$\begin{aligned} c_t &= \lambda(t)\{(1+\alpha)\mathbf{E}\,I_t(Y) - (1+\alpha_1)\mathbf{E}\,[I_t(Y) - A_t(I_t(Y))]\} \\ &= \lambda(t)\{(1+\alpha_1)\mathbf{E}\,A_t(I_t(Y)) - (\alpha_1-\alpha)\mathbf{E}\,I_t(Y)]\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_1 > \alpha$ — коэффициенты нагрузки перестраховщика и страховщика. В момент выплаты $t = t_i$ ($i \geqslant 0$, $t_0 = 0$) страховщик выбирает функции дележа риска страхования $I_t(\cdot)$ и перестрахования $A_t(\cdot)$, в отличие от [2], где инструментом управления риском было только страхование. Тогда $I_t(Y_{i+1})$ — доля от следующей выплаты, возмещаемая клиенту, и $A_t(I_t(Y_{i+1}))$ — доля риска страховщика после перестрахования. Допустимые стратегии $I = \{I_t\}$ и $A = \{A_t\}$ — неупреждающие измеримые относительно естественной фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}$ и удовлетворяющие стандартным неравенствам $0 \leqslant I_t(x) \leqslant x$ и $0 \leqslant A_t(x) \leqslant x$ на $[0,\infty)$.

Наложим дополнительные ограничения, отражающие интересы клиента и перестраховщика. При каждом (фиксированном) t остаточный риск клиента $Y - I_t(Y) \leqslant q$ с вероятностью единица (п. н.), где $q > 0$ — заданная страхователем константа. Эквивалентное ограничение в терминах функции дележа риска страховщика $I_t(x) \geqslant (x-q)_+$, $x \in [0,\infty)$, где $(y)_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max\{y,0\}$. Ограничение на остаточный риск перестраховщика $I_t(Y) - A_t(I_t(Y)) \leqslant Q$ п. н. или, эквивалентно, $A_t(x) \geqslant (x-Q)_+$, $x \in [0,\infty)$.

Исследуемая задача оптимального управления имеет вид минимизации стационарного коэффициента вариации

$$J[I,A] \equiv \limsup_{t\to\infty} \mathbf{D}\,X_t/\mathbf{E}\,X_t \to \min, \tag{4}$$

где минимум берется по множеству определенных выше допустимых стратегий $\{I,A\}$.

Лемма. *Минимум в задаче* (4) *достигается в классе постоянных стратегий* $I_t(\cdot) = I(\cdot)$ *и* $A_t(\cdot) = A(\cdot)$, *т. е. марковских стационарных стратегий, не зависящих ни от момента принятия решения* t, *ни от текущего состояния* $x = X_t$. *Стратегии* $I(\cdot)$ *и* $A(\cdot)$ *есть решение задачи*

$$J[I,A] \equiv \frac{\mathbf{E}\,A^2(I(Y))}{\alpha_1\{\mathbf{E}\,A(I(Y)) - \delta\mathbf{E}\,I(Y)\}} \to \min \tag{5}$$

при ограничениях $(x-q)_+ \leqslant I(x) \leqslant x$, $(x-Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x$ *и* $\mathbf{E}\,A(I(Y)) > \delta\mathbf{E}\,I(Y)$, *где* $\delta = (\alpha_1-\alpha)/\alpha_1$.

2. Оптимальный выбор перестрахования. Рассмотрим частный случай задачи (5), когда стационарный коэффициент вариации в (5) минимизируется только выбором функции дележа перестрахования $(x-Q)_+ \leqslant A(x) \leqslant x$, а функция $I(x) \equiv x$ — ущерб каждого клиента страхуется целиком:

$$J[A] \equiv \frac{\mathbf{E}\, A^2(Y)}{\alpha_1\{\mathbf{E}\, A(Y) - \delta \mathbf{E}\, Y\}} \to \min, \quad \mathbf{E}\, A(Y) > \delta \mathbf{E}\, Y. \tag{6}$$

Обозначим $a' \in (0, \infty)$ корень уравнения $\int_0^a \overline{F}(x)\, dx + \int_a^\infty \overline{F}(x+Q)\, dx = \delta \mathbf{E}\, Y$ и положим $a_0 = a' \vee 0$.

Теорема 1. *Задача* (6) *имеет единственное решение, частичное «stop loss» перестрахование* $A^*(x) = (x \wedge a^*) \vee (x - Q)$, *где* a^* *является единственным корнем на* (a_0, ∞) *уравнения*

$$\int_0^a (a-x)\overline{F}(x)\, dx + \int_a^\infty (a-x)\overline{F}(x+Q)\, dx - a\delta \mathbf{E}\, Y = 0.$$

3. Оптимальный выбор страхования и перестрахования. Пусть выбор перестрахования свободен от дополнительных ограничений, а допустимые дележи страхования удовлетворяют ограничению снизу на риск страховщика. Тогда задача (5) принимает вид

$$J[I, A] \equiv \frac{\mathbf{E}\, A^2(I(Y))}{\alpha_1\{\mathbf{E}\, A(I(Y)) - \delta \mathbf{E}\, I(Y)\}} \to \min, eqno(7)$$

$$x \geqslant I(x) \geqslant (x-q)_+, \quad x \geqslant A(x) \geqslant 0, \quad \mathbf{E}\, A(I(Y)) - \delta \mathbf{E}\, I(Y) > 0.$$

Аналогично теореме 1, обозначим $a^0 \in (0, \infty)$ корень уравнения

$$(1-\delta)\left[\int_0^k \overline{F}(x)\, dx + \int_k^a \overline{F}(x+q)\, dx\right] - k\delta \int_a^\infty \overline{F}(x+q)\, dx = 0,$$

где $k = a(1-\delta)$.

Теорема 2. *Оптимальным перестрахованием в* (7) *является «stop loss» перестрахование* $A^*(x) = x \wedge a^*$. *Оптимальным страхованием является комбинация stop-loss страхования и франшизы,* $I^*(x) = (x \wedge k^*) \vee (x - q)$. *Здесь* $k^* = a^*(1-\delta)$, *параметр* a^* *есть единственный корень на* (a^0, ∞) *уравнения*

$$(1-\delta)\left[\int_0^k (k-x)\overline{F}(x)\, dx + \int_k^a k-x)\overline{F}(x+q)\, dx\right] - k\delta \int_a^\infty \overline{F}(x+q)\, dx = 0,$$

где $k = a(1-\delta)$.

Полученная в теореме 2 функция $I^*(x)$ — это своего рода комбинация франшизы $I(x) = (x-q)_+$ и stop-loss страхования $I(x) = x \wedge k^*$. Доля, не возмещаемая клиенту, есть $Y - I^*(Y) = (Y - k^*)_+ \wedge q$. После перестрахования доля риска, оплачиваемая страховщиком, есть кусочно-линейная функция $A^*(I^*(Y)) = I^*(Y) \wedge a^*$, где a^* ($a^* > k^*$) — максимальная сумма, которую он возмещает клиенту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bowers N. L.*, *Gerber H. U.*, *Hickman J. C.*, *Jones D. A.*, *Nesbitt C. J.* Actuarial Mathematics. Itaca, Illinois: The Society of Actuaries, 1986.
2. *Голубин А. Ю.*, *Гридин В. Н.* Оптимальные стратегии страхования в процессе риска с ограничениями на риски страхователей. — Автоматика и телемеханика, 2010, т. 71, в. 8, с. 79–91.