Г. В. Мартынов (Москва, ИППИ РАН, МФТИ). **О компонентах Дурбина–Нотта для статистик омега квадрат.**

Статистика Крамера–Мизеса (омега-квадрат) может быть представлена в форме

$$\omega_n^2 = n\int_0^1 \psi^2(t)(F_n(t)-t)^2\,dt = \int_0^1 \xi_n^2(t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} V_{i,n}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_{i,n}^2}{\lambda_i},$$

где $V_{i,n} = \int_0^1 \xi_n(t)\varphi_i(t)\,dt$ являются компонентами Дурбина–Нотта эмпирического процесса $\xi(t)$, $\lambda_i = \mathbf{E}\,Vi,n$. Обозначим $D_{i,n} = \sqrt{\lambda_i}V_{i,n}$ нормализованные компоненты, причем $ED_{i,n} = 0$, $ED_{i,n}^2 = 1$, $i = 1,2,\ldots$ При $n \to \infty$ предельные компоненты D_i, $i = 1,2,\ldots$, независимы и имеют распределение $\mathbf{N}(0,1)$. Пусть $d_1, d_2, \ldots$ является последовательностью таких чисел, что $1/d_1 + 1/d_2 + \cdots < \infty$. Тогда статистика $\omega_n^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty} D_{i,n}^2/d_i$ имеет двойное взвешивание. Первое взвешивание производится весовой функцией $\psi(t)$, а другое — последовательностью $d_1, d_2, \ldots$ Таким образом, мы имеем как амлитудное взвешивание, так и частотное (по компонентам). Сделаем следующие преобразования:

$$\omega^{*2} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{D_i^2}{d_i} = \int_0^1\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{d_i}}D_i\varphi_i(t)\right)^2 dt = \int_0^1\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\lambda_i}{d_i}}\int_0^1 \xi(s)\varphi_i(s)\,ds\,\varphi_i(t)\right)^2 dt$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{d_i}\int_0^1 \xi(s)\varphi_i(s)\,ds\int_0^1 \xi(z)\varphi_i(z)\,dz = \int_0^1\int_0^1 \xi(s)W(s,z)\xi(z)\,ds\,dz,$$

где $W(s,z) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i d_i^{-1}\varphi_i(s)\varphi_i(z)$ является положительно определенной весовой функцией. Здесь сумма и интеграл можно поменять местами, если d_i/λ_i стремится к ∞ быстрее, чем i. Другое представление выводится следующим образом:

$$\omega^{*2} = \int_0^1\int_0^1 \xi(s)W(s,z)\xi(z)\,ds\,dz = \int_0^1\int_0^1 \xi(s)\int_0^1 W^{\langle 1/2\rangle}(s,r)W^{\langle 1/2\rangle}(r,z)\,dr\,\xi(z)\,ds\,dz$$
$$= \int_0^1\left[\int_0^1 \xi(s)W^{\langle 1/2\rangle}(s,r)\,ds\int_0^1 W^{\langle 1/2\rangle}(r,z)\xi(z)\,dz\right]dr = \int_0^1\left[\int_0^1 \xi(s)W^{\langle 1/2\rangle}(s,t)\,ds\right]^2 dt.$$

Здесь

$$W(s,z) = \int_0^1 W^{\langle 1/2\rangle}(s,r)W^{\langle 1/2\rangle}(r,z)\,dr,$$
$$W^{\langle 1/2\rangle}(s,z) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{d_i}\varphi_i(s)\varphi_i(z)\right)^{\langle 1/2\rangle} = \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\lambda_i}{d_i}}\varphi_i(s)\varphi_i(z).$$

Отношение d_i/λ_i должно стремиться к ∞ быстрее, чем i^2.

Мы можем рассматривать две формы дважды взвешенной статистики омега-квадрат:

$$\omega_n^2 = \int_0^1\left[\int_0^1 \xi_n(s)W_1(s,t)\,ds\right]^2 dt \quad \text{и} \quad \omega_n^2 = \int_0^1\int_0^1 \xi_n(t)W_2(t,\tau)\xi_n(\tau)\,dt\,d\tau.$$

Пусть $\zeta_n(t) = \int_0^1 \xi_n(s)W_1(s,t)\,ds$. Тогда $\mathbf{E}\,\zeta(t) = 0$, и предельная ковариационная функция

$$K_\zeta(t,\tau) = \mathbf{E}\,\zeta(t)\zeta(\tau) = \int_0^1\int_0^1 (\min\{s,r\} - sr)W_1(s,t)W_1(r,\tau)\,ds\,dr.$$

Условие слабой сходимости $\zeta_n(t)$ в $L_2[0,1]$ есть

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\min\{s,r\} - sr)W_1(s,t)W_1(r,t)\,ds\,dr\,dt < \infty.$$

Рассматривается также случай параметрических контигуальных альтернатив.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-07-00180a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Durbin J.*, *Knott M.* Components of the Cramér–von-Mises Statistics. I. — J. R. Statist. Soc., B, 1972, v. 34, p. 290–307.
2. *Durbin J.*, *Knott M.*, *Taylor L. C.* Components of the Cramér–von-Mises Statistics. II. — J. R. Statist. Soc., B, 1975, v. 37, p. 216–237.
3. *Schoenefeld D. A.* Asymptotic priperties of tests based on linear combination of the orthogonal components of the Cramér–von Mises statistic. Ann. Statist., 1977, v. 5, № 5, p. 1017–1026.