О. В. Русаков (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Суммы независимых пуассоновских процессов случайного индекса: явная конструкция предельного процесса для α-устойчивого случая.**

Пусть $(\xi) = \ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots$ есть последовательность случайных величин, $\Pi(s) = \Pi_\lambda(s)$ $(s \in \mathbf{R})$ — пуассоновский случайный процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, независимый от последовательности (ξ).

Определение. *Процессом пуассоновского случайного индекса* $\psi(s) = \psi_\lambda(s)$ назовем субординацию для последовательности (ξ), выполненную посредством пуассоновского процесса Π, т. е.

$$\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}, \quad s \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Последовательность (ξ) мы называем *формирующей*, процесс Π — *управляющим*, а полученный процесс ψ — *процессом* ПСИ.

Рассмотрим случай, когда случайные величины управляющей последовательности принадлежат области притяжения строго α-устойчивого закона при $\alpha \in (0,2]$, независимы, одинаково распределены, центрированы и надлежащим образом нормированы.

В случае, когда элементы формирующей последовательности имеют нулевое математическое ожидание и второй момент, нетрудно убедиться а экспоненциальном убывании автоковариации процесса ПСИ, $\operatorname{cov}(\psi(s_1), \psi(s_2)) = e^{-\lambda|s_1-s_2|}$, $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$.

Пусть $(\psi_j(s))$ $(j \in \mathbf{N})$ — независимые копии процесса $\psi(s)$, заданного определением (1). Рассмотрим суммы данных процессов ПСИ. Для удобства предварительно и стандартным образом нормируем элементы формирующих последовательностей, сделав их бесконечно малыми с ростом числа слагаемых таким образом, чтобы осуществлялась сходимость к закону из данной области притяжения. Также стандартным образом параметризуем эти суммы временным параметром $t \in [0,1]$,

$$Z_N(t,s) = \sum_{j=1}^{[Nt]} \psi_j(s), \qquad s \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

здесь квадратные скобки обозначают целую часть. Время пуассоновских процессов s мы условно будем называть *внутренним*, а время t накапливания процессов ПСИ — *внешним* временем. Имеет место следующая предельная теорема [1].

Теорема 1. *Конечномерные распределения процесса $Z_N(t,s)$, определенного* (2) *при заданном коэффициенте устойчивости $\alpha \in (0,2]$, сходятся при $N \to \infty$ к конечномерным распределениям центрированного поля $Z(t,s)$ со следующими свойствами*:

a) *независимость и стационарность приращений вдоль внешнего времени t*;

b) *марковость вдоль внутреннего времени s при каждом фиксированном значении внешнего времени t_0*;

c) *парная характеристическая функция задается равенством*

$$\begin{aligned}\varphi_{u,s}(\mu,\nu) &= \mathbf{E}\exp\{\mu Z(t_0,u) + \nu Z(t_0,s)\} \\ &= \exp\Big\{-t_0^\alpha\Big[\Big(1-e^{-\lambda(s-u)}\Big)(|\mu|^\alpha + |\nu|^\alpha) + e^{-\lambda(s-u)}\,\Big|\mu+\nu|^\alpha\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{3}$$

при $\mu, \nu \in \mathbf{R}$, вещественных $u \leqslant s$, $t_0 \in (0,1]$.

Замечание. Формулировка теоремы 1 однозначно устанавливает распределение в пространстве Скорохода $\mathbf{D}([0,1] \times \mathbf{R})$. Нетрудно видеть, что при $\alpha = 2$ равенство (3) даст характеристическую функцию гауссовского процесса Орнштейна–Уленбека с дисперсией t_0 и вязкостью $\lambda > 0$. Предельный процесс, полученный для $\alpha \in (0,2)$, может рассматриваться как естественное обобщение гауссовского процесса Орнштейна–Уленбека на α-устойчивый случай с тяжелыми хвостами.

Следующая теорема конструктивно устанавливает факт существования предельного процесса теоремы 1 в виде процесса скользящего среднего со специальным двумерным ядром.

Рассмотрим случайное поле Винера–Ченцова, заданное на $[0,1]\times\mathbf{R}\ni(t,s)$, т. е. строго α-устойчивый белый шум $dW_\alpha(t,s)$, $\alpha\in(0,2]$, со структурной мерой Лебега. Для простоты предположим, что $\lambda=1$, и рассмотрим фиксированное $t_0=1$. Введем следующее двумерное ядро, $s\geqslant 0$, $A_s\overset{\Delta}{=}\{(v,r)\colon\ r\leqslant s,\ v\leqslant e^{-(s-r)}\}$.

Теорема 2. *Распределение в пространстве Скорохода* $\mathbf{D}(\mathbf{R})$ *процесса* $U_\alpha(s)=Z(1,s)$, *определенного в теореме* 1, *описывается моделью скользящего среднего* $U_\alpha(s)\overset{d}{=}\int_{A_3}dW_\alpha(v,u)$ *при всяком* $\alpha\in(0,2]$.

Нетрудно убедиться, что в случае $\alpha=2$ теорема 2 дает стандартный процесс Орнштейна–Уленбека.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Русаков О. В.* Суммы независимых пуассоновских субординаторов и альфа-устойчивый процесс Орнштейна–Уленбека. — Записки научных семинаров ПОМИ, 2008, т. 361, с. 123–137.