Т. Р. Ш а р и п о в, **И. И. Г о л и ч е в** (Санкт-Петербург, СПбГУ, Уфа, ИМВЦ УНЦ РАН). **Метод последовательных приближений для радиальной однофазной фильтрации.**

Для моделирования притока однофазного вязкого сжимаемого флюида к вскрывающей цилиндрический пласт скважине рассматривается уравнение изотермической осесимметричной фильтрации

$$\phi\,\frac{\partial\,\rho}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\rho\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\,\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\,g\right)\right)=0,\quad r\in[r_w,R_c],\quad z\in[0,h],\quad (1)$$

получаемое из общего уравнения неразрывности в декартовой системе координат [1]

$$\phi\,\frac{\partial\,\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\,\mathbf{u})=0,\quad \mathbf{u}=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x},\,\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\,g\right)$$

подстановкой $\operatorname{div}\mathbf{a}=(1/r)\,\partial(r\,a_r)/\partial r+\partial a_z\,/\,\partial z$ для вектора $\mathbf{a}=(a_r,\,a_z)\equiv\rho\,\mathbf{u}$ из радиальной системы координат. Здесь r, z, t — радиальная, вертикальная и временная координата, r_w — внешний радиус скважины, R_c — радиус контура питания, h — высота пласта, g — ускорение свободного падения, $\phi=\phi(r,\,z)$ — пористость, $k=k(r,\,z)$ — абсолютная проницаемость, $p=p(r,\,z,\,t)$ — давление, $\rho=\rho(p)$ — плотность, $\mu=\mu(p)$ — динамическая вязкость, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(r,\,z,\,t)$ — вектор скорости фильтрации.

Задача (1) замыкается краевыми условиями $\rho(r,\,z,\,0)=p_R$, $p(r_w,\,z,\,t)=p_w$, $p(R_c,\,z,\,t)=p_R$, где p_w, p_R — забойное и пластовое давление соответственно. Кровля ($z=h$) и подошва ($z=0$) пласта непротекаемы: $\mathbf{u}(r,\,0,\,t)=\mathbf{u}(r,\,h,\,t)=0$.

Ранее [2] при численном решении частного случая задачи (1) (плоскорадиальная фильтрация) использовался метод Ньютона, обладающий локальной сходимостью. В работе, представленной данным докладом, предлагается метод последовательных приближений, развитый в [3] для параболических уравнений с использованием априорных оценок решения, которые обеспечивают сходимость терационного процесса с любого начального приближения.

Процесс фильтрации будем предполагать баротропным $p=p(\rho)$, откуда $\partial p\,/\,\partial x=(\partial p\,/\,\partial\rho)(\partial\,\rho\,/\,\partial x)$ $(x=r,\,z)$ и после введения замены переменных $s=\ln(r\,/\,r_w)$ возможна декартова запись (1) в виде нелинейной параболической начально-краевой задачи относительно $\rho=\rho(s,\,z,\,t)$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial s}\left(A_1(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial s}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(A_2(\rho)\,\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}A_0(\rho)=0,\quad s\in\left[0,\ln\left(\frac{R_c}{r_w}\right)\right],\qquad (2)$$

$$\rho(s,\,z,\,0)=p_R,\quad p(0,\,z,\,t)=p_w,\quad p(\ln(R_c\,/\,r_w),\,z,\,t)=p_R,\quad \mathbf{u}(s,\,0,\,t)=\mathbf{u}(s,\,h,\,t)=0,$$

где

$$A_1(\rho)=\rho\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial\rho}\,\frac{1}{(r_w\,e^s)^2},\quad A_2(\rho)=\rho\,\frac{k}{\mu}\,\frac{\partial p}{\partial\rho},\quad A_0(\rho)=-\rho^2\,\frac{k}{\mu}\,g.$$

Если для любого s и z из рассматриваемой области известны априорные оценки на некотором временном отрезке $t\in[0,T]$

$$m\leqslant\rho\leqslant M,\quad 0<\alpha_1\leqslant A_i\leqslant\alpha_2,\quad i=1,2,\qquad (3)$$

то при $\alpha=(\alpha_1+\alpha_2)/2$ последовательность $\{\rho_n\}$, определяемая как последовательность решений параболических уравнений

$$\frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial t}-\alpha\Delta\rho_{n+1}+\beta\,\rho_{n+1}=-\,\alpha\Delta\rho_n+\beta\rho_n$$
$$+\frac{\partial}{\partial s}\left(A_1(P(\rho_n))\frac{\partial\rho_n}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_2(P(\rho_n))\frac{\partial\rho_n}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}A_0(P(\rho_n)),\qquad (4)$$

с краевыми условиями для задачи (2), сходится с любого начального приближения к решению задачи (2) на любом временном интервале $t \in (0, T]$ [3]. Здесь $P(\rho) = \{m \,\forall\, \rho < m,\ \rho \,\forall\, \rho \in [m, M],\ M \,\forall\, \rho > M\}$ есть оператор проектирования на $[m, M]$, а β — произвольный неотрицательный параметр, позволяющий дополнительно ускорить сходимость.

В качестве аппроксимации (4) была использована стандартная неявная пятиточечная разностная схема [4] с равномерными шагами по s и z. Переход от переменной r к s обеспечивает желательное экспоненциальное измельчение сетки вблизи скважины. При этом скорость сходимости итерационного процесса (4) не зависит от шага по пространственным переменным и увеличивается при уменьшении временного интервала [3], поэтому оценки (3) целесообразно получать на каждом временном слое. Проведенные модельные расчеты показали уменьшение расчетного времени по сравнению с методом Ньютона за счет использования экономичных методов [4] решения параболических уравнений (4). Предлагаемый метод позволяет использовать схему Гира 4-го порядка аппроксимации, что дает возможность эффективно рассчитывать медленно протекающие процессы с большим шагом по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басниев К. С.*, *Дмитриев Н. М.*, *Розенберг Г. Д.* Нефтегазовая гидромеханика. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 544 с.
2. *Бураков И. М.*, *Гарипов Т. Т.*, *Шарипов Т. Р.* Интегрированное гидродинамическое моделирование системы скважина–пласт. — Научно-технический вестник Роснефти, 2009, № 2, с. 15–17.
3. *Голичев И.И.* Решение некоторых задач для параболических уравнений методом последовательных приближений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1989, 172 с.
4. *Самарский А. А.*, *Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989, 432 с.