Г. И. Белявский, **П. А. Лужецкая** (Ростов-на-Дону, ЮФУ, РГСУ). **Настройка параметров процессов Леви с использованием быстрого преобразования Фурье.**

Процессы Леви в качестве средства моделирования имеют широкое распространение. Эффективность или неэффективность их использования определяется, в первую очередь, возможностью настройки параметров по наблюдаемой траектории случайного процесса. Использование метода максимального правдоподобия затруднено, поскольку явный вид плотности известен для небольшого числа безгранично делимых законов распределения. Использование специальных функций для вычисления плотности требует больших затрат. В докладе рассматривается использование для этих целей характеристической функции, зависящей от неизвестных параметров.

Прежде всего, отметим, что приращения $\varepsilon_i = X_{ih} - X_{(i-1)h}$ независимы и имеют одинаковое распределение с характеристической функцией $\varphi(a,x) = E_a e^{ix\varepsilon_i} = e^{h\psi(a,x)}$, где $\psi(a,x)$ — характеристическая экспонента [3]. Если характеристическая функция абсолютно интегрируема на вещественной прямой для всех допустимых значений параметров, то существует плотность $p(a,y) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy}\varphi(a,x)\,dx$. Для вычисления параметров методом максимального правдоподобия необходимо определить $\max_a[l(a,\varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{N}\ln p(a,\varepsilon_j)]$. Дополнительно предположим, что градиент $\partial\varphi(a,x)$ абсолютно интегрируем на вещественной прямой, тогда необходимый для применения численных методов поиска максимума градиент плотности по параметрам вычисляется по формуле $\partial_a\varphi(a,\varepsilon_j) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\varepsilon_j}\partial_a\varphi(a,x)\,dx$. Определим $\alpha = \min\{\varepsilon_j\}$, $\beta = \max\{\varepsilon_j\}$. Выберем n, исходя из того, что $n+1$ является степенью двойки. Вычислим шаг сетки по оси OY: $\Delta y = (\beta-\alpha)/(n+1)$, затем по оси OX: $\Delta x = 2\pi/((n+1)\Delta y)$. Далее вычислим $\delta = \pi/\Delta y$. Приближенное значение для градиента $\partial_a l(a,\varepsilon)$ будет иметь вид

$$\partial\bar{l}(a,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\left[m_k(\varepsilon)\sum_{j=0}^{n}\exp\left\{-\frac{2\pi ijk}{n+1}\right\}\partial_a\overline{\varphi}_j(a)\right]\Big/\left[\sum_{j=0}^{n}\exp\left\{-\frac{2\pi ijk}{n}\right\}\overline{\varphi}_j(a)\right]\right\},$$

В формуле $m_k(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{N} I_{[(k_0+k)\Delta y,(k_0+k+1)\Delta y)}(\varepsilon_j)$,

$$\overline{\varphi}_j(a) = \exp\left\{-\frac{2\pi ija}{n+1}\right\}\sum_{m=-L}^{L}\nu(\delta + j\Delta x - 2m\delta)\varphi(a,\delta + j\Delta x - 2m\delta).$$

При вычислении использован сглаживающий множитель $\nu(x)$, значение L определяется сглаживающим множителем. Внутренние суммы в выражении для градиента являются дискретными преобразованиями Фурье и могут быть вычислены с использованием быстрого преобразования Фурье [1].

Таким образом, получен конструктивный способ вычисления градиента от логарифма функции правдоподобия, что позволяет применять для вычисления параметров распределения градиентные методы оптимизации [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маккелан Дж. Г., Рейдер Ч. М.* Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов./Под ред. Ю. И. Манина. М.: Радио и связь, 1983, 264 с.
2. *Мину М.* Математическое программирование. М.: Наука, 1990, 486 с.
3. *Beroin J.* Levy processes. Cambrige: Cambridge University Press, 1996, 265 p.