

Е. Е. Дьяконова (Москва, МИАН). **Условная предельная теорема для многотипного докритического ветвящегося процесса в случайной среде.**

Пусть $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), Z_2(n), \dots, Z_p(n))$ ($n = 0, 1, \dots$) — процесс Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде, которая задается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин $\zeta = \{\zeta_n, n = 0, 1, \dots\}$, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и принимающих значения из подмножества Θ множества действительных чисел. Каждому значению $\theta \in \Theta$ поставлен в соответствие p -мерный вектор $\mathbf{F}^{(\theta)}(s) = (F_1^{(\theta)}(s), F_2^{(\theta)}(s), \dots, F_p^{(\theta)}(s))'$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_p)'$, $0 \leq s_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, p$, многомерных вероятностных производящих функций $F_i^{(\theta)}(s)$, $i = 1, 2, \dots, p$. Процесс $\mathbf{Z}(n)$ ($n = 0, 1, \dots$) в случайной среде ζ описывает эволюцию популяции частиц $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), Z_2(n), \dots, Z_p(n))$, где $Z_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, p$, есть число частиц типа i в n -м поколении. А именно, предполагается, что если $\zeta_n = \theta$, $\theta \in \Theta$, то все $Z_i(n)$ частиц типа i , $i = 1, 2, \dots, p$, из n -го поколения размножаются согласно p -мерной производящей функции $F_i^{(\theta)}(s)$ независимо от других частиц из n -го ($n = 0, 1, \dots$) поколения.

Пусть $M^{(\theta)} = (M^{(\theta)}(i, j))_{i, j}^p$ ($M^{(\theta)}(i, j) > 0$) — матрица средних значений, соответствующая $\mathbf{F}^{(\theta)}(s)$, $\mathbf{v}(M^{(\theta)})$ — левый положительный собственный вектор матрицы $M^{(\theta)}$, соответствующий ее перрону корню, причем $|\mathbf{v}(M^{(\theta)})| = 1$. Обозначим ρ_0 перрону корень матрицы $M^{(\zeta_0)}$. Пусть $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_j$, где \mathbf{e}_j — p -мерный вектор, j -я компонента которого равна 1, а остальные — 0.

При некоторых условиях на наборы производящих функции $\mathbf{F}^{(\theta)}(s)$, в частности, для случая, когда для всех θ первые моменты распределений, соответствующих компонентам вектора $\mathbf{F}^{(\theta)}(s)$, ограничены с двух сторон, а вторые моменты ограничены сверху, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть $\mathbf{E}(\rho_0 \log \rho_0) < 0$, $\mathbf{v}(M^{(\theta)}) \equiv \mathbf{v}$ для всех $\theta \in \Theta$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\mathbf{Z}(n) = \mathbf{k} \mid |\mathbf{Z}(n)| > 0\} = q(\mathbf{k}), \quad |\mathbf{k}| \geq 1,$$

где $\sum_{\mathbf{k}: |\mathbf{k}| \geq 1} q(\mathbf{k}) = 1$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_p)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139.