В. А. И в н и ц к и й (Москва, МГУПС)**. Асимптотические формулы для начальных моментов произвольного порядка количества поступивших к моменту t требований рекуррентного потока.**

В работе, представленной данным докладом, находятся асимптотические формулы для начальных моментов произвольного порядка количества поступивших к моменту t требований рекуррентного потока при $t \to \infty$ методом стохастических разностных уравнений [1]. Обозначим $H(t)$ функцию восстановления, т. е. математическое ожидание количества требований рекуррентного потока $v(t)$, поступивших до момента t. В [2] приведены асимптотические формулы для семиинвариантов первых четырех порядков.

Рассматривается рекуррентный поток требований, т. е. на оси времени последовательно расположены случайные точки $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ так, что с вероятностью 1 выполнено: $t_n \geqslant t_{n-1}$, $n \geqslant 1$, $t_0 \geqslant 0$. В каждую из точек $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ поступает одно требование. Случайные величины $z_0 = t_0$, $z_k = t_k - t_{k-1}$, $k \geqslant 1$, являются независимыми неотрицательными случайными величинами, причем $\mathbf{P}\{z_0 < x\} = \varphi^{(0)}(x)$, а $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ одинаково распределены и их функция распределения имеет произвольный вид, $\mathbf{P}\{z_i < x\} = F(x)$, $i = 1, 2, \dots, n, \dots$ Обозначим $\alpha_i = \int_0^\infty x^i\, dF(x)$ и $\alpha_i^{(0)} = \int_0^\infty x^i\, d\varphi^{(0)}(x)$, $i = 1, 2, 3$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *При произвольных начальных условиях $n^{(1)}(0)$ и $\varphi^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределениях $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты α_i и $\alpha_i^{(0)}$, при $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$H(t) = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1^2} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + n^{(1)}(0) + o\,(1). \tag{1}$$

Теорема 2. *Для второго начального момента $n^{(2)}(t) = \mathbf{M}\, v(t)^2$ процесса $v(t)$ для произвольных начальных условий $n^{(1)}(0) = \mathbf{M}\, v(0)^2$ и $\varphi^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка, соответственно, при $t \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\begin{aligned} n_2(t) = {} & \frac{t^2}{\alpha_1^2} + \frac{2t}{\alpha_1^2}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 2n^{(1)}(0)\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) \\ & + n^{(2)}(0) + n^{(1)}(0)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} - \alpha_1^{(0)}(1 + 2n^{(1)}(0)) + \frac{2}{\alpha_1^2}\left(\alpha_1\alpha_1^{(0)} + \frac{1}{2}\alpha_2^{(0)}\right) \\ & + \frac{3\alpha_2}{2\alpha_1^2} - \frac{2}{\alpha_1^4}\left(\frac{1}{4}\alpha_2^2 + \frac{1}{3}\alpha_3\alpha_1\right) + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + o\,(1). \end{aligned} \tag{2}$$

Следствие. *Для дисперсии процесса $v(t)$ справедлива следующая асимптотическая формула*:

$$\mathbf{D}\, v(t) = \frac{t}{\alpha_1^3}\mathbf{D}\, z_1 + \frac{5\alpha_2^2}{4\alpha_1^4} - \frac{2\alpha_3}{3\alpha_1^3} - \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} + \mathbf{D}\, v(0) + \frac{\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1} + \frac{\mathbf{D}\, z_0}{\alpha_1^2} - \frac{\alpha_2\alpha_1^{(0)}}{\alpha_1^3} + o\,(1). \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Формула (3) отличается от формулы, приведенной в [2], учетом в общем виде начальных условий (в [2] $\mathbf{M}\, v(0) = 0$ и $\varphi^{(0)}(x) \equiv F(x)$).

Теорема 3. *Для начального момента $n^{(k)}(t) = \mathbf{M}\, v(t)^k$ процесса $v(t)$, где k — произвольное целое положительное число, для произвольных начальных условий $n^{(k)}(0) = \mathbf{M}\, v(0)^k$ и $\varphi^{(0)}(x)$ и нерешетчатых распределений $F(x)$ и $\varphi^{(0)}(x)$, имеющих конечные начальные моменты 3-го и 2-го порядка, соответственно, при $t \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$n^{(k)}(t) = \frac{t^k}{\alpha_1^k} + \frac{t^{k-1}}{\alpha_1^k}\left(k\left(\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - (k-1)\alpha_1 - \alpha_1^{(0)}\right) + k!\left(\frac{1}{2}(k-1) + n^{(1)}(0)\right)\frac{\alpha_1}{(k-1)!}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{t^{k-2}}{\alpha_1^k}\Bigg(k(k-1)\Bigg((k-1)\alpha_1\alpha_1^{(0)}+\frac{1}{2}(k-1)\alpha_2+\frac{1}{2}\alpha_2^{(0)}+C_{k-1}^2\alpha_1^2\\
&-\frac{1}{\alpha_1^2}\left(\frac{1}{4}C_k^2\alpha_2^2+\frac{k}{6}\alpha_3\alpha_1\right)+\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\frac{k}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-(k-1)\alpha_1-\alpha_1^{(0)}\right)\Bigg)\\
&+k!\left(\frac{1}{2}(k-1)+n^{(1)}(0)\right)\left(\frac{k-1}{2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}-(k-2)\alpha_1-\alpha_1^{(0)}\right)\Bigg)\frac{\alpha_1}{(k-2)!}\\
&+\Bigg(k!\left(\frac{1}{4}k+\frac{1}{2}n^{(1)}(0)-\frac{7}{12}\right)+\frac{1}{2}k!\Bigg((k-3)\left(\frac{1}{3}+n^{(1)}(0)\right)\\
&+n^{(2)}(0)+\frac{1}{2}C_{k-3}^2\Bigg)\frac{\alpha_1^2}{(k-2)!}\Bigg)+o\left(t^{k-2}\right).
\end{aligned}
$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивницкий В. А.* Определение корреляционных функций количества требований в узлах замкнутой сети массового обслуживания с возможностью обхода узлов требованиями. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 5, с. 856–857.
2. *Кокс Д. Р.*, *Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967, 300 с.