Е. А. П о т е х и н а (Череповец, ЧГУ). **Применение произведения Адамара в задаче перечисления упорядоченных разбиений компонент вектора на фиксированные слагаемые.**

Рассмотрим упорядоченное разбиение $Z_{s,t}^{1,m} = (z_1, z_2, \ldots, z_{s+t})$ числа r на s слагаемых, равных 1, и t слагаемых, равных целому числу $m \geqslant 2$, причем $s + mt = r$, где r, s, t — целые неотрицательные числа. Слагаемому, равному 1, приписывается вес a, слагаемому m — вес b. Под *весом разбиения* понимается произведение весов образующих его слагаемых. Обозначим $Z_{i,j}^{1,n} = (z'_1, z'_2, \ldots, z'_{i+j})$ упорядоченное разбиение числа r на i слагаемых, равных 1 и имеющих вес c, и j слагаемых с весом d, равных целому числу $n \geqslant 2$, причем $i + nj = r$, где i, j — целые неотрицательные числа.

Рассмотрим производящие функции $\sum_{Z_{s,t}^{1,m}} a^s b^t x^{s+mt}$ и $\sum_{Z_{i,j}^{1,n}} c^i d^j x^{i+nj}$, где суммирование ведется по всем определенным выше множествам разбиений. Первая из этих функций равна производящей функции $\sum_{r=0}^{\infty} f_r(a,b)x^r = (1 - ax - bx^m)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(ax + bx^m)^k$ последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением $f_r(a,b) = af_{r-1}(a,b) + bf_{r-m}(a,b)$ с начальными условиями $f_0 = 1$ и $f_r = 0$ при $r < 0$. При $a = b = 1$ и $m = 2$ данная последовательность представляет собой последовательность чисел Фибоначчи. Элемент $f_r(a,b)$ может быть найден как сумма весов упорядоченных разбиений $Z_{s,t}^{1,m}$. Аналогично записывается вторая функция.

Рассмотрим теперь разбиения прямоугольника $2 \times r$ (вектора (r,r)), представляющие собой пары $\overline{Z} = (Z_{s,t}^{1,m}, Z_{i,j}^{1,n})$ определенных выше разбиений числа r. Вес такого разбиения определим как произведение весов разбиений $Z_{s,t}^{1,m}, Z_{i,j}^{1,n}$. Разбиение $Z_{s,t}^{1,m}$ можно рассматривать как разбиение первого ряда прямоугольника (первой компоненты вектора), а $Z_{i,j}^{1,n}$ — второго ряда (второй компоненты вектора) на плитки размером 1×1, $1 \times m$ и 1×1, $1 \times n$, соответственно (слагаемые $(1,0)$, $(m,0)$ и $(0,1)$, $(0,n)$).

Произведением Адамара степенных рядов $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k$ и $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k x^k$ называется степенной ряд $G(x) * H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k h_k x^k$. По определению $(1 - ax - bx^m)^{-1} * (1 - cx - dx^n)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(a,b) f_r(c,d) x^r$. Коэффициент $f_r(a,b)f_r(c,d)$ при x^r определяет сумму весов разбиений $\overline{Z} = (Z_{s,t}^{1,m}, Z_{i,j}^{1,n})$.

Задачу вычисления производящей функции весов разбиений $\overline{Z} = (Z_{s,t}^{1,m}, Z_{i,j}^{1,n})$ удается решить при помощи алгебраического метода вычисления произведения Адамара [1, с. 505]. Полученный результат выражает следующая теорема.

Теорема. *Для любых целых m, n, k, $m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $k < m$ справедлива следующая формула*:

$$\frac{x^k}{1 - ax - bx^m} * \frac{1}{1 - cx - dx^n} = \frac{\det R_n}{\det S_n},$$

где S_n —матрица порядка n вида

$$\begin{pmatrix} 1 - acx + B_1 & A_{12} & \ldots & A_{1,n-2} & A_{1,n-1} & -adx^n + A_{1n} \\ -a + B_2 & 1 + A_{22} & \ldots & A_{2,n-2} & A_{2,n-1} & A_{2n} \\ B_3 & -a + A_{32} & \ldots & A_{3,n-2} & A_{3,n-1} & A_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n-2} & A_{n-2,2} & \ldots & 1 + A_{n-2,n-2} & A_{n-2,n-1} & A_{n-2,n} \\ B_{n-1} & A_{n-1,2} & \ldots & -a + A_{n-1,n-2} & 1 + A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ B_n & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n-2} & -a + A_{n,n-1} & 1 + A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $B_i = -bf_{m-i+1}x^{m-i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_{ij} = -bdf_{m-i-n+j}x^{m+j-i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 2, 3, \ldots, n$, матрица R_n получается из S_n заменой первой строки строкой

$$\left(f_k x^k \quad df_{k-n+1}x^{k+1} \quad \ldots \quad df_{k-3}x^{k+n-3} \quad df_{k-2}x^{k+n-2} \quad df_{k-1}x^{k+n-1} \right),$$

$$f_m = f_m(c,d) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{[m/n]} \binom{m-(n-1)i}{i} c^{m-ni} d^i, & \textit{при } m \geqslant 0, \\ 0, & \textit{при } m < 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толовиков М. И.* Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 505–506.