И. В. П а в л о в (Ростов-на-Дону, РГСУ). **О приближении произвольных мартингальных мер мартингальными мерами, удовлетворяющими свойству универсальной хааровской единственности (СУХЕ).**

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$, где $3 \leqslant m < \infty$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m\}$. На фильтрованном пространстве $(\Omega, (\mathcal{F}_n)_{n=o}^1)$ рассмотрим одношаговую модель дисконтированного финансового рынка, где цена торгуемой акции обозначается $(Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$. Обозначим $Z_0 = a$, $Z_1(\omega_k) = b_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Будем предполагать, что $\min_{1\leqslant k\leqslant m} b_k < a < \max_{1\leqslant k\leqslant m} b_k$, из чего следует безарбитражность рассматриваемого рынка. Множество невырожденных мартингальных мер этого рынка обозначим $\mathcal{P}$. Ясно, что это множество совпадает с множеством решений $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ следующей системы линейных ограничений:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1, \quad b_1p_1 + b_2p_2 + \cdots + b_mp_m = a, \quad p_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Будем говорить (см. [1, 2]), что мера $P \in \mathcal{P}$ удовлетворяе т условию несовпадения барицентров (УНБ), если для любых двух таких наборов индексов $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_\alpha\}$, $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_\beta\}$, что $I, J \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, $I \cap J = \varnothing$, выполняется неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\alpha} b_{i_k} p_{i_k} \Big/ \sum_{k=1}^{\alpha} p_{i_k} \neq \sum_{k=1}^{\beta} b_{j_k} p_{j_k} \Big/ \sum_{k=1}^{\beta} p_{j_k}.$$

Множество мер $P \in \mathcal{P}$, удовлетворяющих УНБ, будем обозначать $\mathcal{P}^*$. Известно (см. [1, 2]), что УНБ равносильно СУХЕ – специальному интерполяционному свойству мартингальной меры P. Легко видеть, что если $\mathcal{P}^* \neq \varnothing$, то числа $a, b_1, b_2, \ldots, b_m$ различны.

Теорема. *Пусть числа $a, b_1, b_2, \ldots, b_m$ различны. Если ε – сколь угодно малое наперед заданное число, а $P \in \mathcal{P}$ — произвольная точка, то в $\mathcal{P}$ можно построить ломаную линию, соединяющую эту точку с некоторой точкой $P^* \in \mathcal{P}^*$ такой, что справедливо неравенство $\|P - P^*\| < \varepsilon$.*

З а м е ч а н и е 1. Из полученной теоремы автоматически вытекает важный факт, доказанный значительно более сложными методами в [1, 2]: если числа $a, b_1, b_2, \ldots, b_m$ различны, то $\mathcal{P}^* \neq \varnothing$.

Доказательство данной теоремы конструктивно и применяется при построении алгоритмов приближения мартингальных мер из $\mathcal{P}$ мартингальными мерами из $\mathcal{P}^*$ (т. е. удовлетворяющими УНБ), что, в свою очередь, используется в интерполяционных процедурах, позволяющих преобразовывать безарбитражные финансовые рынки в безарбитражные и полные. Отметим, что существует (см. [3]) основанный на чисто вычислительных идеях алгоритм приближения мер из $\mathcal{P}$ мерами из более широкого, чем $\mathcal{P}^*$, множества мартингальных мер, удовлетворяющих так называемому *ослабленному свойству универсальной хааровской единственности* (см. [4]). Таким образом, основной результат данного доклада обобщает упомянутый результат из [3].

З а м е ч а н и е 2. Анонсированная теорема с естественными видоизменениями обобщается на финансовые рынки с конечными горизонтами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 3, с. 143–44.
2. *Богачева М. Н., Павлов И. В.* О хааровских расширениях безарбитражных финансовых рынков до безарбитражных и полных. — Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2002, № 3, с. 16–24.

3. *Выхристов В. А.*, *Можаев Г. А.* О финансовых расчетах на безарбитражных (B, S)-рынках с конечным числом агрессивных скупщиков акций. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 5, с. 769–789.
4. *Данекянц А. Г.*, *Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2004, т. 11, в. 3, с. 506–508.