ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

С. Я. Шатских, **И. С. Орлова**, **Л. Э. Мелкумова** (Самара, СамГУ). **Приближенное решение вполне интегрируемых квантильных уравнений Пфаффа.**

Для семейства случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tag{1}$$

обладающих воспроизводимостью условных квантилей (см. [1], [2]), рассмотрим вполне интегрируемое квантильное уравнение Пфаффа

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_i = 0, \tag{2}$$

где $A_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — алгебраическое дополнения элемента dx_i матрицы

$$\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & \dots & dx_{n-1} & dx_n \\ 1 & \dot q_{2|1}^{(x_1,x_2)}(x_1) & \dots & \dot q_{n-1|j}^{(x_1,x_{n-1})}(x_1) & \dot q_{n|j}^{(x_1,x_n)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot q_{1|n-1}^{(x_1,x_{n-1})}(x_j) & \dot q_{2|n-1}^{(x_2,x_{n-1})}(x_{n-1}) & \dots & 1 & \dot q_{n|n-1}^{(x_{n-1},x_n)}(x_{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\dot q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j) := \left.\frac{dq_{i|j}^{(x_i,x_j)}(t_j)}{dt_j}\right|_{t_j=x_j}.$$

Заметим, что производные одномерных условных квантилей $\dot q_{i|j}^{(x_i,x_j)}(x_j)$ определяются только двумерными вероятностными распределениями семейства (1), в то время как решением уравнения (2), проходящим через отмеченную точку $\mathbf{x}^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$, является «большая» условная квантиль этого семейства (см. [1], [2])

$$x_n = q_{n|1\dots n-1}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad x_n^\circ = q_{n|1\dots n-1}^{(\mathbf{x}^\circ)}(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_{n-1}^\circ). \tag{3}$$

Таким образом, решая квантильное уравнение (2), мы получим $(n-1)$-мерную условную квантиль (3), располагая лишь всеми двумерными вероятностными распределениями (одномерными условными квантилями) семейства (1). Это обстоятельство может играть важную роль в плане сокращения числа наблюдений в прикладных задачах квантильной регрессии.

Считая, что $A_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, задачу нахождения решения (3) для уравнения Пфаффа (2) можно переформулировать как задачу Коши для многомерного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\begin{cases} du(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))}{A_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}\, dx_i, \\ x_n^\circ = u(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_{n-1}^\circ). \end{cases} \tag{4}$$

Ввиду сложностей, которые могут возникнуть при использовании разностных методов решения многомерных дифференциальных уравнений 1-го порядка (см. [3, с. 235]), мы будем искать приближенное решение $u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ лишь на заданном пучке лучей, выходящих из точки $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{n-1}^\circ)$ (см. [4, с. 103]):

$$\begin{cases} \mathbf{l}_1(t) = (x_1^\circ + a_1^1 t, \ldots, x_{n-1}^\circ + a_{n-1}^1 t), \\ \mathbf{l}_2(t) = (x_1^\circ + a_1^2 t, \ldots, x_{n-1}^\circ + a_{n-1}^2 t), \\ \vdots \\ \mathbf{l}_m(t) = (x_1^\circ + a_1^m t, \ldots, x_{n-1}^\circ + a_{n-1}^m t), \end{cases} \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

После интерполяции приближенного решения задачи Коши (4) на каждом луче этого пучка, можно использовать метод радиальных функций [5] для получения приближенного решения на всей сферической окрестности точки $(x_1^\circ, x_2^\circ, \ldots, x_{n-1}^\circ)$.

В качестве модельного примера для трехмерного сферически симметричного распределения Коши было найдено приближенное решение квантильного уравнения Пфаффа

$$(1 + x_1^2 + x_2^2)\, dx_3 - x_3 x_1\, dx_1 - x_3 x_2\, dx_2 = 0, \tag{6}$$

проходящее через точку $\mathbf{x}^\circ = (1,1,1)$. Был выбран пучек (5) из восьми равномерно распределенных лучей с центром в точке $\mathbf{x}^\circ$. Для приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения на каждом луче использовался метод Рунге–Кутта четвертого порядка (**MATLAB** R2010a, **ODE45**). Интерполяция точек на луче проводилась с помощью полиномиальной регрессии шестого порядка (**MATHEMATICA 8**, **NonlinearRegression**): $p_6(s) = 1,00001 - 0,471667s + 0,0568953s^2 + 0,02554s^3 + 0,00351072s^4 + 0,0173781s^5 - 0,00674438s^6$. Ввиду сферической симметричности исходного распределения Коши, приближенное решение квантильного уравнения (6) в окрестности точки $(1,1,1)$ можно записать в виде $\overline{p} = p_6(\sqrt{2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. Оценка точности

$$\left| q_{3|12}^{(1,1,1)}(x_1, x_2) - \overline{p} \right| < 0,000048, \quad (x_1, x_2) \in [-1,1] \times [-1,1].$$

Реализация метода радиальных функций проводилась для пучка восьми лучей с помощью функции

$$\begin{aligned} s(r,\theta) \;:=\; & g_0(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta\right) + g_1(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta + 1\right) + g_{-1}(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta - 1\right) + g_2(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta + 2\right) \\ & + g_{-2}(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta - 2\right) + g_3(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta + 3\right) + g_{-3}(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta - 3\right) + g_4(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta + 4\right) \\ & + g_{-4}(r)\phi\left(\frac{4}{\pi}\theta - 4\right), \quad r \in [0,R], \quad \theta \in [-\pi, \pi], \end{aligned}$$

где $g_i(r)$ — радиальные решения уравнения Пфаффа на лучах и «треугольная» функция

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1, \\ 1 + x, & -1 < x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Была проведена программная реализация приближенного решения уравнения Пфаффа и на языке C. Для ускорения вычислений в этой программе использовалась библиотека параллельных вычислений MPI. Программа была реализована на 64-ядерном кластере СГАУ. Для 7-мерного сферически симметричного распределения Коши (7-мерное уравнение Пфаффа) система 728 дифференциальных уравнений была решена за 10 минут.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлова И. С.*, *Шатских С. Я.* Уравнения Пфаффа для условных квантилей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 2, с. 237–239.
2. *Орлова И. С.*, *Шатских С. Я.* Дифференциальные уравнения Пфаффа для условных квантилей многомерных вероятностных распределений. — Вестник СамГУ, 2010, № 2 (76), с. 32–46.
3. *Гайшун И. В.* Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения. М.: УРСС, 2004.
4. *Рождественский Б. Л.*, *Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. *Buhmann M.* Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.