**О Б О З Р Е Н И Е**
**П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й**
**Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2,3**
**2012**

**Е.А.Потехина** (Череповец, ЧГУ). **Применение произведения Адамара в задаче перечисления упорядоченных разбиений компонент вектора на произвольные слагаемые.**

Рассмотрим упорядоченное разбиение $Y_{s_1,s_2,\dots,s_n} = (y_1, y_2, \dots, y_{s_1+s_2+\dots+s_n})$ числа $r$ на $s_1$ слагаемых, равных 1, $s_2$ слагаемых, равных 2, и т.д., $s_n$ слагаемых, равных целому числу $n \geq 2$, причем $s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = r$, где $r$, $s_i$ — целые неотрицательные числа $(i = 1, 2, \dots, n)$. Слагаемому, равному $i$, приписывается вес $d_i$. Под *весом разбиения* понимается произведение весов образующих его слагаемых. Обозначим $Y_{t_1,t_2,\dots,t_m} = (y'_1, y'_2, \dots, y'_{t_1+t_2+\dots+t_m})$ упорядоченное разбиение числа $r$ на $t_1$ слагаемых, равных 1 и имеющих вес $b_1$, $t_2$ слагаемых, равных 2 и имеющих вес $b_2$, и т. д. $t_m$ слагаемых с весом $b_m$, равных целому числу $m \geq 2$, причем $t_1 + 2t_2 + \dots + mt_m = r$, где $t_j$ — целые неотрицательные числа $(j = 1, 2, \dots, m)$.

Рассмотрим производящие функции $\sum_{Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}} d_1^{s_1} d_2^{s_2} \dots d_n^{s_n} x^{s_1+2s_2+\dots+ns_n}$ и $\sum_{Y_{t_1,t_2,\dots,t_m}} b_1^{t_1} b_2^{t_2} \dots b_m^{t_m} x^{t_1+2t_2+\dots+mt_m}$, где суммирование ведется по всем определенным выше множествам разбиений. Первая из этих функций равна производящей функции $\sum_{r=0}^{\infty} f_r(d_1, d_2, \dots, d_n)x^r = (1 - d_1x - d_2x^2 - \dots - d_nx^n)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n)^k$ последовательности, задаваемой рекуррентным соотношением $f_r(d_1, d_2, \dots, d_n) = d_1f_{r-1} + d_2f_{r-2} + \dots + d_nf_{r-n}$ с начальными условиями $f_0 = 1$ и $f_r = 0$ при $r < 0$. При $d_i = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ и $n = 2$ данная последовательность представляет собой последовательность чисел Фибоначчи. Элемент $f_r(d_1, d_2, \dots, d_n)$ может быть найден как сумма весов упорядоченных разбиений $Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}$. Сумма весов упорядоченных разбиений числа $r$ на $k$ слагаемых равна коэффициенту при $x^r$ в выражении $(d_1x + d_2x^2 + \dots + d_nx^n)^k$. Аналогично записывается вторая функция.

Рассмотрим теперь разбиения прямоугольника $2 \times r$ (вектора $(r, r)$), представляющие собой пары $\overline{Y}_r = (Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}, Y_{t_1,t_2,\dots,t_m})$ определенных выше разбиений числа $r$. Вес такого разбиения определим как произведение весов разбиений $Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}, Y_{t_1,t_2,\dots,t_m}$. Разбиение $Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}$ можно рассматривать как разбиение первого ряда прямоугольника (первой компоненты вектора) на плитки размером $1 \times 1$, $1 \times 2, \dots, 1 \times n$ (слагаемые $(1, 0)$, $(2, 0), \dots, (n, 0)$), а разбиение $Y_{t_1,t_2,\dots,t_m}$ — как разбиение второго ряда (второй компоненты вектора) на плитки размером $1 \times 1$, $1 \times 2, \dots, 1 \times m$ (слагаемые $(0, 1)$, $(0, 2), \dots, (0, m)$).

*Произведением Адамара* степенных рядов $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_kx^k$ и $H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h_kx^k$ называется степенной ряд $G(x) * H(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_kh_kx^k$. По определению $(1-d_1x-d_2x^2-\dots-d_nx^n)^{-1} * (1-b_1x-b_2x^2-\dots-b_mx^m)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} f_r(d_1, d_2, \dots, d_n)f_r(b_1, b_2, \dots, b_m)x^r$. Коэффициент $f_r(d_1, d_2, \dots, d_n)f_r(b_1, b_2, \dots, b_m)$ при $x^r$ определяет сумму весов разбиений $\overline{Y}_r = (Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}, Y_{t_1,t_2,\dots,t_m})$.

Задачу вычисления производящей функции весов разбиений $\overline{Y}_r = (Y_{s_1,s_2,\dots,s_n}, Y_{t_1,t_2,\dots,t_m})$ удается решить с помощью алгебраического метода вычисления произведения Адамара [1, с. 505]. Полученный результат выражает следующая теорема.

**Теорема.** *Для любых целых $m$, $n$, $k$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, $k < m$ справедлива следующая формула:*

$$\frac{1}{1-d_1x-d_2x^2-\cdots-d_nx^n} * \frac{x^k}{1-b_1x-b_2x^2-\cdots-b_mx^m} = \frac{(-1)^k \det R_{m,m-k}}{\det R},$$

*где $R$ - матрица порядка $m$ вида*

$$\begin{pmatrix} 1+A_{11} & -d_1x+A_{12} & -d_2x^2+A_{13} & \ldots & -d_{m-2}x^{m-2}+A_{1,m-1} & B_1 \\ A_{21} & 1+A_{22} & -d_1x+A_{23} & \ldots & -d_{m-3}x^{m-3}+A_{2,m-1} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & 1+A_{33} & \ldots & -d_{m-4}x^{m-4}+A_{3,m-1} & B_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m-1,1} & A_{m-1,2} & A_{m-1,3} & \ldots & 1+A_{m-1,m-1} & B_{m-1} \\ A_{m,1} & A_{m,2} & A_{m,3} & \ldots & A_{m,m-1} & B_m \end{pmatrix},$$

$A_{ij} = -\sum_{s=m-i+1}^{n} d_s x^s \sum_{t=m-j+1}^{m} b_t f_{s-t+i-j}$, $B_i = -\sum_{s=m-i}^{n} f_{s-m+i} d_s x^s$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,\ldots,m-1$, $d_0 = -1$,

$$f_r = f_r\left(b_1, b_2, \ldots, b_m\right) = \begin{cases} b_1 f_{r-1} + b_2 f_{r-2} + \cdots + b_m f_{r-m} & \textit{при} \quad r > 0, \\ 1 & \textit{при} \quad r = 0, \\ 0 & \textit{при} \quad r < 0, \end{cases}$$

*матрица $R_{m,m-k}$ получается из $R$ вычеркиванием $m$-й строки и $(m-k)$-го столбца.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толовиков М. И.* Случайные блуждания и произведение Адамара степенных рядов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2011, т. 18, в. 3, с. 505–506.