О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2,3
2012

А. Б. З и н ч е н к о (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Минимальный тест на игру большого босса.**

Кооперативные модели используются для обоснованного принятия решений при управлении организационными структурами, создают базу для переговоров экономических агентов. Игра (N, ν), где $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 3$, $\nu \in G^N = \{g : 2^N \to \mathbf{R}\}$, является игрой большого босса, если один из агентов (босс) имеет право вето, а остальные (слабые) игроки действуют успешней, объединяясь в союзы. Практическое значение таких игр подтверждено многочисленными примерами. Для исследования поведения решений на подклассах игр из G^N важно знать их экстремальные элементы. Направляющие векторы конуса K^N не монотонных игр большого босса известны, но для конуса $MK^N \subset K^N$ монотонных игр проблема пока не решена. Для ее решения достаточно описать крайние точки многогранника $MP^N \subset MK^N$ нормализованных игр, т.к. они биективно соответствуют направляющим векторам конуса MK^N. В связи с этим возникает вспомогательная задача исключения избыточных ограничений из системы, определяющей MP^N.

Теорема. *Неприводимая система ограничений для многогранника MP^N игр с агентом 1 в качестве босса имеет вид*:

$$\nu(N) = 1, \quad \nu(T) = 0, \quad \textit{если} \quad 1 \notin T \quad \textit{или} \quad T = \{1\}, \tag{1}$$

$$\nu(H) \geqslant \nu(T), \quad 1 \in T \subset H \subseteq N, \quad |T| = |H| - 1, \quad |H| \neq n - 1, \tag{2}$$

$$-\nu(T) + \sum_{i \in N \setminus T} \nu(N \setminus i) \geqslant n - |T| - 1, \qquad 1 \in T \subset N, \quad |T| \leqslant n - 2. \tag{3}$$

Заметим, что (1) включает условие нормировки и свойство босса, (2) обеспечивает монотонность, а (3) — выполнение свойства союза.

Доказано также, что $\dim(MP^N) = 2^{n-1} - 2$. Если исключить фиксированные переменные, то MP^N преобразуется в многогранник полной размерности, для которого (2)–(3) является единственной неприводимой системой. Количество ограничений k в (2)–(3) значительно меньше, чем в системе, определяющей MK^N. Но, аналогично известному тесту на выпуклость, k кратно 2^{n-1}. Однако, если за длину входа принять не количество игроков, а число коалиций, то получаем полиномиальную оценку сложности. С помощью системы (2)–(3) была решена задача характеризации крайних точек многогранника $SMP^N \subset MP^N$ игр, симметричных относительно коалиции $\{2, \ldots, n\}$ слабых агентов. Минимальный тест для игры $\nu \in SMP^N$ имеет сложность $O\,(n)$.