ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

Е. К. Волосова (Москва, МГУПС). **Точное решение уравнения Блэка–Шоулса с переменной процентной ставкой.**

Различные попытки модификации формулы Блэка–Шоулса (Б–Ш) предпринимались неоднократно [1, 2]. Рассмотрим некоторое платежное обязательство (европейский опцион на покупку), контрактная функция которого $V(s_1, s_2, t)$ зависит от цен s_1, s_2 на два разных актива, и предположим, что рынок безарбитражен. Экономические броуновские движения соответствуют параметрам диффузии (средние дисперсии, волатильности), обозначим их σ_1, σ_2. Стоимость самофинансируемого портфеля $\Pi(t)$ в момент времени t имеет вид $\Pi(t) = V - \delta_1 s_1 - \delta_2 s_2$. Предположим, что цены активов, лежащих в основе опционного контракта, испытывают логарифмические блуждания $ds_j = \mu_1 s_j\, dt + \sigma_j s_j\, dW$, $j = 1, 2$. Здесь μ_j — положительные коэффициенты сноса, $W = W_t$ — процесс броуновского движения. Изменение стоимости всего портфеля записывается как $d\Pi = dV - \delta_1\, ds_1 - \delta_2\, ds_2$, а невозможность арбитража приводит к условию $d\Pi = r(t)\Pi\, dt = r(t)(V - \delta_1 s_1 - \delta_2 s_2)\, dt$, где $r = r(t)$ — мгновенная процентная ставка. Далее используем формулу Ито для изменения стоимости всего портфеля [1, 2] и после последующих стандартных преобразований получим уравнение для определения цены финансового инструмента

$$\begin{aligned} V'_t \;+\; \frac{1}{2}(\sigma_1 s_1)^2 V''_{s_1 s_1} + \frac{1}{2}(\sigma_2 s_2)^2 V''_{s_2 s_2} + \sigma_1\sigma_2 s_1 s_2 V''_{s_1 s_2} + r s_1 V'_{s_1} \\ +\; s_2\left(\mu_2 - \mu_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)V'_{s_2} + \delta_2 s_2\left(\mu_1\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \mu_2 - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + r\right) - r(t)V = 0. \qquad (1) \end{aligned}$$

Данное уравнение имеет точное решение смешанной задачи, используя которое строится модифицированная формула Б–Ш.

Теорема. *Пусть дано уравнение* (1) *с начальными и краевыми условиями*

$$V(s_1, s_2, T) = \max\{s_1 - X, 0\}, \quad X = \mathrm{const} > 0,$$
$$V(0, s_2, t) = g(s_2), \quad V(s_1, 0, t) = p(s_1, t).$$

Тогда точное решение смешанной задачи для уравнения (1) *(анзац) имеет вид*

$$V(s_1, s_2, t) = W(y_1, y_2, \tau) Ca \exp\left\{ -\int r(T-\tau)\, d\tau \right\} + s_2\Phi(\tau),$$

где введены обозначения $t = T - \tau$, $s_j = e^{\chi_j/\alpha_j}$, $j = 1, 2$, $y_1 = C_1\chi_1 + C_2\chi_2$, $y_2 = C_3\chi_1 + C_4\chi_2$, $Ca = \mathrm{const}$, $C_k = \mathrm{const}$, $k = 1, 2, 3, 4$, *и справедливы соотношения между константами*

$$C_3 = -C_4\frac{\sigma_2\alpha_2}{\sigma_1\alpha_1}, \quad C_1 = \frac{1 - C_2\sigma_2\alpha_2}{\sigma_1\alpha_1}, \quad \mu_2 = \frac{2\mu_1\sigma_2 - \sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2\sigma_1}{2\sigma_1}.$$

Функция $\Phi(\tau)$ *имеет вид*

$$\Phi(\tau) = \delta_2 + Ca \exp\left\{ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_1} \int (\sigma_1\sigma_2 + 2r(T-\tau))\, d\tau \right\}, \tag{2}$$

функция $Q(y_1, y_2, \tau) = U(y_3, y_2, \tau)$, *где* $y_3 = y_1 + B(\tau)$, $B(\tau) = (2\sigma_1)^{-1} \int (-\sigma_1^2 + 2r(T-\tau))\, d\tau$, *удовлетворяет линейному параболическому уравнению теплопроводности (диффузии)*

$$U'_\tau(y_3, y_2, \tau) - \frac{1}{2} U''_{y_3 y_3} = 0. \tag{3}$$

Схема доказательства. После подстановки анзаца (заготовки) в уравнение (1) и после замен переменных получим ОДУ

$$2\sigma_1\Phi'(\tau) + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1\sigma_2 + 2r(T-\tau))\Phi(\tau) + \delta_2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1\sigma_2 + 2r(T-\tau)) = 0,$$

решение которого дается формулой (2). Переменную y_2 в данной задаче можно считать параметром, так как в линейном параболическом уравнении нет производной по ней. Существует симметричный вариант формул, когда параметром может стать переменная y_1. Подставляем начальное условие и краевое условие в формулу [4] для первой краевой задачи для уравнения (3):

$$\begin{aligned} U(y_3, y_2, \tau, y_0) \;=\; & \frac{M(y_2)}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_0^\infty u(y_0) \left(\exp\left\{ -\frac{(y_3 - y_0)^2}{2\tau} \right\} - \exp\left\{ -\frac{(y_3 + y_0)^2}{2\tau} \right\} \right) dy_0 \\ & + \frac{M(y_2) y_3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\tau \frac{\widetilde{p}(y_3, T-\theta)}{(\tau-\theta)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{y_3^2}{2(\tau-\theta)} \right\} d\theta + M_1(y_2). \end{aligned}$$

Здесь функции $M(y_2), M_1(y_2)$ связаны с заданным краевым условием сделанными выше заменами. За счет выбора вида краевого условия можно добиться того, чтобы решение представляло собой «контрастную» структуру. Имеется в виду, что возможен такой характер гиперплоскости, описывающей решение, который напоминает ступеньку в трехмерном пространстве. В классической формуле Б–Ш слагаемое, связанное с краевым условием, не учитывалось. В тексте выше сделано важное замечание, дающее ключ к пониманию того, как получить функцию, описывающую граничное условие. Полагая, что имеем один актив, по классическим формулам Б–Ш вычислим цену опциона. Функцию, которая аппроксимирует этот переход старой цены на новую, и можно принять за краевое условие для задачи с двумя активами. Все формулы верны и легко упрощаются в случае постоянной процентной ставки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартынов М. А.* О построении арбитражной хеджирующей стратегии на рынке с активами, зависящими от одинакового случайного фактора. — Вестник Московского гос. ун-та, 2010, с. 18–24.
2. *Bjork T.* Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
3. *Волосов К. А.*, *Вдовина Е. К.*, *Синицын С. О.* Неподвижные точки стохастических полумаятников и точные решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. М.: МИИТ, 2011, 158 с.
4. *Карслоу Г.*, *Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964, 488 с.