ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

С. А. Загребина, Е. А. Солдатова (Челябинск, ЮУрГУ). **Уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной с белым шумом.**

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В области $D \times \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f, \tag{1}$$

которое первоначально возникло как модель давления жидкости, фильтрующейся в трещиновато-пористой среде [1]. Позже выяснилось, что уравнение (1) может служить моделью также для влагопереноса в почве [2] и для теплопроводности в среде с «двумя температурами» [3]. Задача Коши — Дирихле для уравнения (1) обычно рассматривалась в рамках теории уравнений соболевского типа [4], гл. 5. Мы здесь впервые рассмотрим уравнение (1), возмущенное белым шумом, т. е. как *стохастическое уравнение соболевского типа*

$$Ldu = (Mu + f)\,dt + Ndw. \tag{2}$$

Оговоримся сразу, что идеи и методы нашего рассмотрения мы почерпнули из трактата [5].

Пусть $\mathfrak{U}$ — сепарабельное гильбетрово пространство, $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — ядерный оператор (т. е. $\mathrm{Tr}\,(K) < \infty$) и $K \geqslant 0$. Пусть $\{\lambda_k\}$ — семейство собственных значений оператора Q, занумерованное по невозрастанию с учетом их кратности, а $\{e_k\}$ — ортонормированное семейство соответствующих собственных векторов. Возьмем семейство независимых вещественнозначных броуновских движений $\{\beta_k(t)\}$ и формулой

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t)\lambda_k^{\frac{1}{2}} e_k$$

определим винеровский процесс. Далее, пусть $\mathfrak{F}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство, операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен. В силу теоремы о расщеплении уравнение (1) можно (формально) записать в виде эквивалентной ему системы

$$\begin{aligned} Hdu^0 &= (u^0 + f^0)dt + (I - Q)Ndw, \\ du^1 &= (Su^1 + f^1)dt + QNdw. \end{aligned} \tag{3}$$

Потребовав дополнительно

$$(\mathbb{I} - Q)N = \mathbb{O} \quad (\text{или, что то же самое, } N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F}^1)), \tag{$*$}$$

приведем (3) к виду

$$H\dot{u}^0 = u^0 + f^0, \quad u^1(t) = \xi + \int_0^t (Su^1(s) + f^1(s))\,dt + \int_0^t Ndw, \tag{4}$$

где последний интеграл в правой части характеризует белый шум. (Заметим, что этот интеграл заведомо сходится, если например, $N = Q$, а Q — ортопроектор).

К сожалению, формат тезисов не позволяет даже сформулировать точный результат о сильной разрешимости задачи Коши $u^1(0) = \xi$ (ξ — случайная величина) для уравнения (2) в смысле (4) при условии (*). За подробностями мы отсылаем читателя к [5], а тем временем кратко набросаем план сведения задачи Коши–Дирихле для уравнения (1), возмущенного аддитивным белым шумом, к уравнению (2) в смысле (4). Прежде всего, положим $\mathfrak{U} = \overset{\circ}{H}{}^1$, $\mathfrak{F} = H^{-1}$, операторы $L = \lambda\mathbb{I} + \Lambda$, $M = -\alpha\Lambda$, где $\Lambda \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ — оператор, определенный тождеством

$$(\Lambda u, v) = \int_D \sum_{k=1}^{n} u_{x_k} v_{x_k} dx.$$

Все функциональные пространства определены на области D. Так построенные операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M $(L,0)$-ограничен, причем проектором Q здесь будет ортопроектор $Q = \mathbb{I} - \sum_{\lambda_k=-\lambda}(\cdot, e_k)e_k$, где $\{e_k\}$ — собственные функции оператора Λ. В качестве оператора K можно взять сужение оператора Грина $\Lambda^{-1}\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ на пространство $\mathfrak{U}$. И если теперь в качестве оператора N взять ортопроектор Q, то мы получим сильное решение задачи Коши–Дирихле для уравнения (1) с аддитивным белым шумом.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г. А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г. И.*, *Желтов Ю. П.*, *Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах. — Прикл. матем. и механика, 1960, т. 24, №5, с. 58–73.
2. *Hallaire M.* On a theory of moisture-transfer. — Inst. Rech. Agronom, 1964, №3, p. 60–72.
3. *Chen P. J.*, *Gurtin M. E.* On a theory of heat conduction involving two temperatures. — Z. Angew. Math. Phys., 1968, v. 19, p. 614–627.
4. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
5. *Kovács M.*, *Larsson S.* Introduction to stochastic partial differential equations. — In: Proceedings of the conference «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. Publ. ICMCS, 2008, v. 4, p. 159–232.