О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 2,3
2012

В. И. М а с о л, Л. А. Р о м а ш о в а (Киев, КНУ). **Допредельная и предельная оценки вероятности существования решений системы случайных уравнений в заданном множестве векторов над полем $\mathbf{GF}(3)$.**

Рассмотрим над полем $\mathbf{GF}(3)$ систему нелинейных случайных уравнений 2-го порядка

$$\sum\nolimits_{3}_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant n} a_{j_1j_2}^{(\mu)} x_{j_1}x_{j_2} = \mathbf{0}, \quad \mu \in J, \tag{1}$$

где $\sum_3$ — символ суммирования в поле $\mathbf{GF(3)}$, $J = \{1, 2, \ldots, T\}$, $T = T(n)$, удовлетворяющую условию (A), а именно, коэффициенты $a_{j_1j_2}^{(\mu)}$ ($1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n$, $\mu \in J$) — независимые случайные величины, принимающие ненулевые значения в поле $\mathbf{GF}(3)$ с вероятностью $\mathbf{P}\{a_{j_1j_2}^{(\mu)} = \mathbf{1}\} = \mathbf{P}\{\mathbf{a}_{\mathbf{j_1j_2}}^{(\mu)} = \mathbf{2}\} = \mathbf{p}_\mu$ и значение $\mathbf{0} \in \mathbf{GF}(3)$ с вероятностью $\mathbf{P}\{a_{j_1j_2}^{(\mu)} = \mathbf{0}\} = 1 - 2p_\mu$.

Обозначим V_n совокупность всех n-мерных векторов $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которых принадлежат полю $\mathbf{GF}(3)$, и $V_n' = V_n \setminus \{\overline{x}\colon\ |\overline{x}| \leqslant 1\}$, где $|\overline{x}|$ — число ненулевых компонент вектора $\overline{x}$.

Для произвольных векторов $\overline{x}^{(1)}$, $\overline{x}^{(2)}$ ($\overline{x}^{(q)} \in V_n$, $\overline{x}^{(q)} = (x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \ldots, x_n^{(q)})$, $q = 1, 2$) определим число $i_{c_1c_2}$ как количество пар компонент вида (c_1, c_2) среди n возможных пар $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)})$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $c_1, c_2 \in \mathbf{GF}(3)$. Пусть $i = i_{\mathbf{01}} + i_{\mathbf{02}}$, $l = i_{\mathbf{10}} + i_{\mathbf{20}}$.

Обозначим M_n совокупность всех таких векторов $\overline{x}^{(1)}, \overline{x}^{(2)} \in V_n'$, что $i + l \geqslant 1$.

Пусть θ_n — число решений системы (1), принадлежащих множеству M_n , и вероятность p_μ ($\mu \in J$) изменяется в интервале

$$\frac{C \ln n}{n} \leqslant p_\mu \leqslant \frac{1}{2} - \frac{C \ln n}{n}, \tag{2}$$

где $\ln 3/\ln 2 < a_1 \leqslant C = C(n) \leqslant a_2 < \infty$, a_1, a_2 — константы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (A) и (2). Тогда условие

$$T = n\frac{\ln 2}{\ln 3} + A_n, \tag{3}$$

где $A_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, является необходимым и достаточным для того, чтобы выполнялось соотношение $\mathbf{P}\{\theta_n > 0\} = o(1)$ при $n \to \infty$.

З а м е ч а н и е 1. В работе [1] получено необходимое и достаточное условие существования единственного решения в заданном множестве векторов для совместной системы, отличающейся от (1) правой частью.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (A) , (2), (3), параметры $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ и C изменяются так, что $0 < \gamma_1 \leqslant \varepsilon_1 C \leqslant \gamma_0 < (4/3)(1 - (\ln 3)/(C \ln 2))$, где γ_0 и γ_1 — фиксированные числа.*

Тогда найдутся такие число $\varepsilon_2 \in (0,1)$ *и натуральное число* $n_0 = n_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, C)$, *что для* $n \geqslant n_0$ *имеет место следующая нетривиальная оценка*: $\mathbf{P}\{\theta_n > 0\} \leqslant Z$, *где*

$$Z = \sum_{t=2}^{[\nu]} \frac{1}{t!} n^{-z_0 t} + 2^{n\sigma(\varepsilon_2)} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-z_1}\right)^{A_n + n(\ln 2)/(\ln 3)} + \left(\frac{1}{3}\exp\left\{2n^{-z_2}\right\}\right)^{A_n} \exp\left\{\frac{\ln 2}{\ln 3} 2n^{1-z_2}\right\},$$

$$\sigma(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2 \log_2 \varepsilon_2 - (1-\varepsilon_2)\log_2(1-\varepsilon_2), \quad \nu = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 n}{\ln n}},$$

$$z_0 = C\frac{\ln 2}{\ln 3}\left(1 - \frac{\ln 3}{C \ln 2} - \frac{3}{4}\gamma_0\right) + C\frac{A_n}{n}\left(1 - \frac{3}{4}\gamma_0 + \frac{3}{4}C\sqrt{\frac{\varepsilon_1 \ln n}{n}} + \frac{3}{4}C\frac{\ln 2}{\ln 3}\frac{\sqrt{\varepsilon_1 n \ln n}}{A_n}\right),$$

$$z_1 = \frac{3}{2}\gamma_1\left(1 + \sqrt{\frac{\ln n}{\varepsilon_1 n}}\right), \quad z_2 = \frac{3}{2} n C \varepsilon_2^2 \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2 n}\right).$$

З а м е ч а н и е 2. В условиях теоремы 2 оценка Z стремится к 0 при $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Масол В. И., Ромашова Л. А.* Условия единственности решения неоднородной системы нелинейных случайных уравнений над полем $\mathbf{GF}(3)$. — Кибернетика и системный анализ, 2010, в. 2, с. 23–36.