ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк (Челябинск, ЮУрГУ). **О новой концепции белого шума.**

Традиционно [1] под белым шумом понимается случайный процесс $x = x(t)$, чьи: (i) математическое ожидание $E\{x(t)\} = 0$; (ii) и автокорреляционная функция $E\{x(t_1)x(t_2)\} = \sigma^2\delta(t_1 - t_2)$.

Именно благодаря (ii) спектральная плотность мощности белого шума $S_{xx}(\omega) = \sigma_\omega^2$ одинакова на всех частотах, что послужило основанием для названия (по аналогии с белым светом). Довольно часто белый шум встречается как аддитивная составляющая правой части стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). В данном случае белый шум трактуется как производная винеровского процесса. Причем производная понимается в обобщенном смысле, т. к. траектории винеровского процесса почти наверное (п. н.) непрерывны и п. н. недифференцируемы. По этой причине СДУ записывают в виде

$$du = (Su + f)\,dt + Rdw, \tag{1}$$

где в правой части через dw обозначена обобщенная производная винеровского процесса $w = w(t)$.

В настоящее время сложилось два подхода в исследованиях уравнений вида (1). Первый был оформлен в середине прошлого века в трудах К. Ито, Р. Л. Стратоновича и А. В. Скорохода (см. например, [2], [3] и [4]). Этот подход основан на убеждении, что «все дифференциальные уравнения решаются интегрированием», и поэтому содержит весьма изощренные конструкции стохастических интегралов вида $\int_0^t R(s)dw(s)$. (А такие конструкции необходимы, т. к. траектории винеровского процесса — п. н. функции неограниченной вариации). Второй подход возник в школе И. В. Мельниковой (см. например, [5]) в конце прошлого века и основан на убеждении, что все «дифференциальные уравнения разрешимы в подходящих функциональных пространствах». Здесь уравнение (1) рассматривается в пространстве Шварца, где оно приобретает стандартный вид $\dot u = Su + f + \dot w$ и решается классическими методами (например, посредством полугрупп операторов).

Между тем потребности теории динамических измерений побудили авторов рассматривать в качестве математической модели измерительного устройства (ИУ) уравнения соболевского типа [6], [7], которые при наличии аддитивного белого шума могут быть представлены аналогично (1)

$$Ldu = (Mu + f)\,dt + Ndw. \tag{2}$$

Однако исследовать уравнения вида (2) описанными выше способами не представляется возможным, во-первых потому, что решая их в случае $\ker L \neq \{0\}$ приходится не только интегрировать, но и дифференцировать правую часть (см. например, [8], гл. 5). Во-вторых, рамки теории уравнений соболевского типа ограничены пока что

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2012 г.

банаховыми пространствами, а если иметь в виду приложения [6], [7], то даже гильбертовыми. К сожалению, пространство Шварца ни к тем, ни к другим не относится.

Выход нам видится в ревизии понятия производной в (2). Мы предлагаем заменить производную в (2) на симметрическую производную в среднем D_s, введенную в рассмотрение Э. Нельсоном (см. теорию и приложения производных в среднем к стохастическим уравнениям в [9]). Производная D_s обладает рядом замечательных свойств, а именно:

(1) Производная D_s от детерминированного процесса (т. е. неслучайного) совпадает с «обычной» производной.

(2) $D_s w(t) = (2t)^{-1} w(t)$, где $w(t)$ — винеровский процесс.

(3) $D_s w(t)$ обладает свойством (i).

(4) Если заменить уравнение (2) уравнением

$$LD_s u = Mu + f + ND_s w,$$

то к таким уравнениям можно применить теорию [8].

Отметим, что хотя $D_s w(t)$ и не обладает свойством (ii), она тоже может считаться белым шумом по следующей причине. Винеровский процесс — математическая модель броуновского движения. Согласно теории Эйнштейна–Смолуховского смещение частицы в броуновском движении пропорционально $\sqrt{t}$ (т. е. $w(t) \sim \sqrt{t}$). Отсюда скорость частицы должна быть пропорциональна $(2\sqrt{t})^{-1}$, что говорит о невозможности измерить мгновенную скорость в исходной точке. Заметим, что $D_s w(t) \sim (2\sqrt{t})^{-1}$. Это отлично согласуется с классической теорией, и поэтому $D_s w(t)$ является более достойным претендентом на роль белого шума, нежели обобщенная производная.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розанов Ю. А.* Белый шум. — Математическая энциклопедия. Т. 1, М.: БСЭ, 1977, с. 407.
2. *Ito K.* Essentials of Stochastic Processes (Translations of Mathematical Monographs, V. 231). American Mathematical Society, 2006.
3. *Stratonovich R. L.* Conditional Markov Processes and Their Applications to the Theory of Optimal Control. N.-Y.: Elsevier, 1968.
4. *Скороход А. А.* Марковские процессы и вероятностные приложения в анализе. — Итоги науки и техники. Сер. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления, Т. 43. М.: ВИНИТИ, 1989, с. 147–188.
5. *Мельникова И. В.*, *Филинков А. И.*, *Альшанский М. А.* Абстрактные стохастические уравнения. II. Решения в пространстве абстрактных стохастических распределений. — Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. Т. 96. М.: ВИНИТИ, 2006, с. 212–271.
6. *Шестаков А. Л.*, *Свиридюк Г. А.* Новый подход к измерению динамически искаженных сигналов. — Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. моделир. и программ., Челябинск, 2010, № 16(192), в. 5, с. 116–120.
7. *Shestakov A. L.*, *Sviridyuk G. A.* Optimal measurement of dynamically distorted signals. — Вестник Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Матем. моделир. и программ., 2011, № 17(234), v. 8, p. 70–75.
8. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; K ö ln; Tokyo: VSP, 2003.
9. *Gliklikh Y. E.* Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics. London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.