

А. А. З а м ы ш л я е в а, Е. В. Б ы ч к о в (Челябинск, ЮУрГУ). Фазовое пространство полулинейного уравнения Буссинеска-Лява.

Пусть Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u(x, t) = 0, \quad (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (2)$$

для уравнения Буссинеска-Лява

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u + \Delta f(u), \quad (3)$$

моделирующего продольные колебания упругого стержня, волны на мелководье, колебания в молекулах ДНК и многие другие физические процессы.

В подходящих банаховых пространствах $\mathcal{U}$ и $\mathfrak{F}$ задача (1)–(3) может быть редуцирована к уравнению соболевского типа

$$A\ddot{u} = B_1\dot{u} + B_0u + N(u) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \quad (5)$$

где операторы $A, B_0, B_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Наша цель — построить фазовое пространство уравнения (4) (и в дальнейшем исходного уравнения), распространяя идеи метода фазового пространства, разработанного Г. А. Свиридьюком [1] для уравнений соболевского типа первого порядка.

В силу теоремы о расщеплении [2] уравнение (4) может быть редуцировано к эквивалентной ему системе уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= (I - Q)(B_0 + N)(u^0 + u^1), \\ \ddot{u}^1 &= A_1^{-1}QB_1(\dot{u}^0 + \dot{u}^1) + A_1^{-1}Q(B_0 + N)(u^0 + u^1), \end{aligned} \quad (6)$$

где $u^1 = Pu, u^0 = (I - P)u$, P и Q — специальным образом построенные относительно спектральные проекторы в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (I - Q)(B_0 u + N(u)) = 0\}$.

Теорема 1. Пусть пучок операторов $\vec{B}$ является $(A, 0)$ -ограниченным [2], выполнено условие

$$\int_{\gamma} R_{\mu}^A(\vec{B}) d\mu \equiv 0 \quad (7)$$

оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Тогда для любой пары $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{M}$ при выполнении условия

$$(I - Q)(B_0 + N'_{u_0}) : \mathfrak{U}^0 \rightarrow \mathfrak{F}^0 \text{ — тоplineйный изоморфизм,} \quad (8)$$

существует единственное решение задачи (4)–(5), лежащее в $\mathfrak{M}$ как траектория, т. е. множество $\mathfrak{M}$ является (локально) фазовым пространством уравнения (4).

Тогда для исходной задачи имеет место

Теорема 2.

- (i) При всех $\lambda \notin \sigma(\Delta)$, $l > n/2 - 2$, $u_0, u_1 \in \mathfrak{U}$ и $\tau > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-\tau, \tau), \mathfrak{U})$ задачи (1)–(3).
- (ii) Пусть $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$ and $l > n/2 - 2$, $(u_0, u_1) \in T\mathfrak{M}$ и выполнено (8). Тогда для любого $\tau > 0$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-\tau, \tau), \mathfrak{M})$ задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht etc.: VSP, 2003.
2. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка. — Вычисл. технологии, 2003, т. 8, № 4, с. 45–54.