

М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Распределение суммы значений функции от последовательности случайных индикаторов и независимых бернуллиевских последовательностей.**

Пусть $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов (например, случайных величин или векторов), принимающих значения из множества E , и $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ — не зависящий от последовательности $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ случайный вектор, компоненты которого принимают лишь значения 0 и 1. Пусть $\varphi: \{0, 1\} \times E \rightarrow \{0, 1\}$ — измеримая функция. Определим случайные индикаторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ равенством $\xi_k = \varphi(I_k, \omega_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Мы изучим связь распределения суммы $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ с распределением суммы $S = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

В качестве примера можно рассмотреть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $\{(\gamma_1^n, \gamma_2^n, \dots, \gamma_m^n)\}_{n=1}^{\infty}$, компоненты которых $\gamma_1^n, \gamma_2^n, \dots, \gamma_m^n$ — случайные индикаторы, и булеву функцию $\varphi: \{0, 1\}^{m+1} \rightarrow \{0, 1\}$. Тогда $\xi_k = \varphi(I_k, \gamma_1^n, \gamma_2^n, \dots, \gamma_m^n)$.

Введем обозначения: $\delta_k = \varphi(0, \omega_k)$, $\varepsilon_k = \varphi(1, \omega_k)$, $p_0 = \mathbf{P}\{\delta_1 = 1\}$, $p_1 = \mathbf{P}\{\varepsilon_1 = 1\}$, $q_0 = 1 - p_0$, $q_1 = 1 - p_1$.

Теорема. 1. *Распределение случайной величины ζ совпадает с распределением суммы случайного числа случайных величин $\sum_{l=1}^{n-S} \delta_l' + \sum_{m=1}^S \varepsilon_m'$, где $\{\delta_n'\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varepsilon_n'\}_{n=1}^{\infty}$ — такие не зависящие друг от друга и от $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ последовательности независимых случайных индикаторов, что $\mathbf{P}\{\delta_1' = 1\} = p_0$, $\mathbf{P}\{\varepsilon_1' = 1\} = p_1$.*

2. Для всех $r = 0, 1, \dots, n$

$$\mathbf{P}\{\zeta = r\} = \sum_{u=0}^n \mathbf{P}\{S = u\} \sum_{i+j=r} \binom{u}{i} p_1^i (1-p_1)^{u-i} \binom{n-u}{j} p_0^j (1-p_0)^{n-u-j}.$$

3. Пусть $g(x) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}\{S = k\} x^k$, $h(x) = \sum_{r=0}^n \mathbf{P}\{\zeta = r\} x^r$ — производящие функции случайных величин S и ζ . Тогда

$$h(x) = (1 - p_1 + p_1 x)^n g\left(\frac{1 - p_0 + p_0 x}{1 - p_1 + p_1 x}\right).$$

4. Если все корни многочлена $g(x)$ вещественны и отрицательны, то и все корни многочлена $h(x)$ вещественны и отрицательны.

5. При $p_0 > p_1$ справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{\zeta = r\} = \frac{1}{p_0 - p_1} \mathbf{P}\{\tau_{n-r+1} - \sigma_{r+1} = S + 1\}, \quad r = 0, 1, \dots, n,$$

где случайная величина σ_{r+1} имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r+1, 1 - (1-p_0)(1-p_1)$, случайная величина τ_{n-r+1} — распределение

Паскаля с параметрами $n - r + 1, 1 - p_1/p_0$, причем $\sigma_{r+1}, \tau_{n-r+1}$ независимы; при $p_1 > p_0$ справедливы равенства

$$\mathbf{P}\{\zeta = r\} = \frac{1}{p_1 - p_0} \mathbf{P}\{\tau_{r+1} - \sigma_{n-r+1} = S + 1\},$$

$r = 0, 1, \dots, n$, где величина σ_{n-r+1} имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами $r + 1, 1 - p_0/p_1$, величина τ_{r+1} — распределение Паскаля с параметрами $n - r + 1, 1 - (1 - p_1)(1 - p_0)$, $\sigma_{n-r+1}, \tau_{r+1}$ независимы.

Утверждение теоремы остается в силе и при $p_1 = 0$ или $p_0 = 0$. При этом, если $p_1 = 0$, то в пункте 5 нужно считать, что $\tau_{n-r+1} = 0$ с вероятностью 1, а если $p_0 = 0$, то в пункте 5 нужно считать, что $\sigma_{n-r+1} = 0$ с вероятностью 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 11-01-00139а.