ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

Э. Ф. Х а й р е т д и н о в (Москва, НИИМ МГУ). **Асимптотические решения уравнений пограничного слоя.**

Уравнения установившегося ламинарного плоско–парллельного течения несжимаемой вязкой жидкости в пограничном слое представляются в виде [1–2]:

$$u_x + v_y = 0, \quad uu_x + vu_y = VV_x + u_{yy}. \tag{α}$$

Здесь $V(x)$ – заданная функция, не зависящая от y.

Уравнения (α) представлены в безразмерном виде. Функция $V(x)$ предполагается удовлетворяющей следующим условиям: $V(0)=0$, $V'(x)>0$ при $0<x<1$, $V''(0)=0$, $V(1)=1$, $V'(1)=0$, $V'(x)<0$ при $x>1$. (О неоходимости выполнения условия $V''(0)=0$ было доложено в [3].)

Решение уравнений (α) должно удовлетворять граничным условиям

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad u = V \quad \text{при} \quad y = \infty. \tag{β}$$

Введем обозначения: $u_x = u'$, $u_y = u_1$, $u_{xy} = u_1'$, $u_{yy} = u_2$, $u_{yyy} = u_3$, $v_x = v'$, $v_y = v_1$, $\ldots$, а также $u_{y=0} = \overset{\circ}{u} = \omega(x)$, $(u_y)_{y=0} = \overset{\circ}{u}_1$, $\ldots$

Уравнения (α) запишем в виде

$$uu' + vu_1 - VV'(x) = u_2, \quad u' + v_1 = 0, \tag{1}$$

граничные условия на обтекаемой поверхности — в виде

$$y = 0\colon \quad u = v = 0, \quad u_1 = \omega(x). \tag{2}$$

Здесь $\omega(x)$ — функция, которую надо определить так, чтобы выполнялось условие $\int_0^\infty u_1\,dy = V(x)$.

Если считать функцию $\omega(x)$ известной (функция $V(x)$ задана изначально), функции $\overset{\circ}{u}_j(x)$ $(j>1)$ определяются путем дифференцирования уравнений (1) с учетом граничных условий (2):

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{u}_2 &= -VV'(x), \quad \overset{\circ}{u}_3 = 0, \quad \overset{\circ}{u}_4 = \omega\omega', \quad \overset{\circ}{u}_5 = -2\omega(VV')', \\
\overset{\circ}{u}_6 &= 2VV'(VV')', \quad \overset{\circ}{u}_7 = 4\omega^2\omega'' - \omega\omega'^2, \\
\overset{\circ}{u}_8 &= 13(VV')'\omega\omega' - 10(VV')''\omega^2 - 9VV'(\omega\omega')', \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Составим сумму ($n \geqslant 4$)

$$u_1 = e^{-\eta}(\beta_0 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2 + \cdots + \beta_{n-1}\eta^{n-1}). \tag{4}$$

Здесь $\eta = y/h(x)$ $(h(x)>0$ –произвольная функция), множители β_i определим формулами

$$\beta_i = \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j h^j \overset{\circ}{u}_{j+1}, \quad \mathrm{C}_i^j = \frac{i!}{j!\,(i-j)!}, \tag{5}$$

$\beta_0 = \overset{\circ}{u}_1 = \omega, \quad \beta_1 = \overset{\circ}{u}_1 + h\overset{\circ}{u}_2 = \omega - hVV', \quad 2\beta_2 = \overset{\circ}{u}_1 + 2h\overset{\circ}{u}_2 + h^2\overset{\circ}{u}_3 = \omega - 2hVV', \ldots.$

Сумма (4) представляет собой взвешенное (с весом $h^{-1}(x)$) асимптотическое разложение функции $u_1(x,y)$ в интервале $(0,\infty)$ [4, с. 320–329]. Оно считается легитимным, если множители $\beta_j(x)$ непрерывны в полуинтервале $[0,\infty)$. По определению, $\int_0^\infty u_1\,dy = V$. С другой стороны, $\int_0^\infty u_1\,dy = h(x)\int_0^\infty u_1\,d\eta = h_n(\beta_0+\beta_1+2\beta_2+6\beta_3+\cdots+(n-1)!\,\beta_{n-1})$. С учетом формул (2) получим

$$V = n\overset{\circ}{u}_1 h(x) + \cdots + C_n^i \overset{\circ}{u}_i h^i(x) + \cdots + n\overset{\circ}{u}_{n-1}h^{n-1} + \overset{\circ}{u}_n h^n. \tag{6}$$

Если функция $h(x)$ определена, равенство (4) для $n > 3$ превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\omega(x)$.

Порядок уравнения зависит от n . При $n = 4,\ 5,\ 6$ оно имеет первый gорядок, при $n = 7$ — второй. Проще всего положить $h = \mathrm{const}$. Так и сделаем.

Назовем сумму (4) *асимптотическим решением* уравнений (1) порядка $n-3$. При произвольном (постоянном) h значение $\omega'(0)$ для асимптотического решения отличается от точного, которое равно $\omega_0 = c_H k\sqrt{k}$ $(c_H \approx 1,23126)$. При некоторых определенных значениях параметра h оно совпадает с ω_0 . Для уяснения ситуации рассмотрим асимптотическое решение 1-ого порядка, которое имеет вид

$$u_1 = e^{-\eta}(\beta_0 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2 + \beta_3\eta^3). \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\beta_0 = \overset{\circ}{u}_1 = \omega(x), \quad \beta_1 = \overset{\circ}{u}_1 + \overset{\circ}{u}_2 h = \omega - V(x)V'(x)h,\\
&2\beta_2 = \overset{\circ}{u}_1 + 2\overset{\circ}{u}_2 h + \overset{\circ}{u}_3 h^2 = \omega - 2VV'h \quad (\overset{\circ}{u}_3 = 0),\\
&6\beta_3 = \overset{\circ}{u}_1 + 3\overset{\circ}{u}_2 h + 3\overset{\circ}{u}_3 h^2 + \overset{\circ}{u}_4 h^3 = \omega - 3VV'h + \omega\omega' x h^3.
\end{aligned}$$

Уравнение (6) в этом случае представляется в виде

$$V = 4h\omega - 6h^2VV' + h^4\omega\omega'. \tag{8}$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение 1-ого порядка относительно неизвестной функции $\omega(x)$. Дифференцируя его по x , получим при $x \to 0$: $k = 4h\omega'(0) - 6h^2k^2 + h^4(\omega'(0))^2$ $(\omega(0) = 0)$. Отсюда следует

$$\omega'(0) = \left(2 + \sqrt{4 + (k + 6k^2h^2)h^2}\,\right)/h^3. \tag{9}$$

Чтобы имело место $\omega'(0) = \omega_0'$, необходимо, чтобы h был корнем алгебраического уравнения 4-ой степени вида

$$1 = 4c_H h\sqrt{k} - 6h^2k + c_H^2 h^4 k^2. \tag{10}$$

Вычисление показывает, что уравнение (10) имеет три положительных корня. По крайней мере, один из них должен быть в согласии с уравнением (9) , т. е. с ним должно выполняться равенство

$$2 + \sqrt{4 + (k + 6k^2h^2)h^2} = h^3\omega_0. \tag{11}$$

Нельзя исключить того, что ни один из корней уравнения (10) не будет удовлетворять уравнению (11). Но это не беда. Асимптотические решения обладают приятным свойством: нормированная линейная связка двух или более асимпотических решений одного порядка вновь является асимптотическим решением. Поэтому легко построить асимптотическое решение, удовлетворяющее начальному условию в рассмотренном выше смысле.

Аналогично обстоит дело с асимптотическими решениями более высоких порядков.

Работа поддерживалась РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, 1956, 528 с.
2. *Лойцянский Л Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: ФМ, 1962, 479 с.
3. *Хайретдинов Э. Ф.* Новый подход к решению задачи о течении в пограничном слое. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 724–726.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифф. и интегр. исчисления. Т. 2. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948, 860 с.