ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2,3
2012

А. В. Колногоров, А. О. Олейников (Великий Новгород, НовГУ). **Оптимизация параллельной многоэтапной обработки в случайной среде.**

Рассматривается задача о двуруком бандите на конечном отрезке времени длины N. Предполагается, что текущие доходы ξ_n, $n = 1, 2, \dots, N$, имеют нормальные распределения с плотностями $f(x \,|\, m_\ell) = (2\pi)^{-1/2} e^{-(x-m_\ell)^2/2}$, где m_ℓ соответствует текущему выбранному варианту ($\ell = 1, 2$). Такой двурукий бандит характеризуется векторным параметром $\theta = (m_1, m_2)$, а множество допустимых значений $\Theta = \{(m_1, m_2) : |m_1 - m_2| \leqslant 2cN^{-1/2}\}$, где c — некоторая константа ($0 < c < \infty$). Цель управления состоит в максимизации полного ожидаемого дохода. Для этого используется стратегия σ. Функция потерь, обусловленная неполнотой информации о процессе, имеет вид $L_N(\sigma, \theta) = E_{\sigma,\theta} \sum_{n=1}^{N} ((m_1 \vee m_2) - \xi_n)$. Байесовский и минимаксный риски определяется как

$$R_N^B(\lambda) = \min_{\{\sigma\}} \int_\Theta L_N(\sigma, \theta)\lambda(\theta)\, d\theta, \quad R_N^M(\lambda) = \min_{\{\sigma\}} \max_\Theta L_N(\sigma, \theta),$$

им соответствуют байесовская и минимаксная стратегии. Из основной теоремы теории игр следует, что минимаксные стратегия и риск совпадают с байесовскими на наихудшем априорном распределении, соответствующем максимуму байесовского риска.

Положим $m_1 = u + v$, $m_2 = u - v$, тогда $\theta = (u + v, u - v)$, $\Theta = \{\theta\colon\ |v| \leqslant cN^{-1/2}\}$. В новых переменных асимптотически наихудшая плотность распределения может быть выбрана в виде $\nu_a(u, v) = \kappa_a(u)\rho(v)$, где $\kappa_a(u)$ — постоянная плотность при $|u| \leqslant a$, $\rho(v) = \rho(-v)$ — симметрическая плотность и $a \to \infty$.

Используя результаты [1], дадим рекуррентное уравнение для вычисления байесовского риска, соответсвующего стратегии параллельного управления:

$$R_{n_1,n_2}(\cdot) = \min(R^{(1)}_{n_1,n_2}(\cdot), R^{(2)}_{n_1,n_2}(\cdot)),$$

где $R^{(1)}_{n_1,n_2}(Z) = R^{(2)}_{n_1,n_2}(Z) = 0$ при $n_1 + n_2 = N$,

$$R^{(1)}_{n_1,n_2}(Z) = M_i g^{(1)}_{n_1,n_2}(Z) + n_2^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_1+M_i,n_2}(Z + z) h_{n_1,M_i}\left(\frac{ZM_i - n_1 z}{n_2}\right) dz,$$

$$R^{(2)}_{n_1,n_2}(Z) = M_i g^{(2)}_{n_1,n_2}(Z) + n_1^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{n_1,n_2+M_i}(Z + z) h_{n_2,M_i}\left(\frac{ZM_i - n_2 z}{n_1}\right) dz$$

при $n_1 + n_2 = 2M_0 + \dots + M_{i-1}$, $n_1 \geqslant M_0$, $n_2 \geqslant M_0$. Здесь

$$g^{(\ell)}_{n_1,n_2}(Z) = \int\limits_0^\infty 2v g_{n_1,n_2}(Z, (-1)^{\ell+1} v)\rho(v)\, dv, \quad \ell = 1, 2,$$

$$g_{n_1,n_2}(Z, v) = (2\pi n_1 n_2 (n_1 + n_2))^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{(Z + 2v n_1 n_2)^2}{2 n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \right\},$$

$$h_{n,M}(z) = \left(\frac{n + M}{2\pi n M}\right)^{1/2} \exp\left\{ -\frac{z^2}{2nM(n + M)} \right\}.$$

Оптимизация размеров групп данных для заданного c может быть решена с использованием численных методов, например, методом покоординатного спуска или градиентными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колногоров А. В.* Нахождение минимаксных стратегии и риска в случайной среде (задаче о двуруком бандите). — Автомат. и телемех., 2011, № 5, с. 127–138.