ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

Н. П. В е л и ч к о (Шахты, ЮРГУЭС). **Теорема о неподвижной точке в вогнутом модулярном пространстве.**

Понятие некорректности задачи решения некоторого операторного уравнения неразрывно связано с пространством, в котором уравнение рассматривается. Таким образом, расширение семейства пространств с развитым математическим аппаратом является актуальным.

Пусть X — некоторое векторное пространство над полем $\mathcal{K}$, обозначим $\mathbf{R}^+ = [0,\infty)$, $\overline{\mathbf{R}}^+ = [0,\infty]$.

О п р е д е л е н и е 1. Функционал $\rho\colon X \to \overline{\mathbf{R}}^+$ будем называть *модуляром*, если выполняются условия: (a) $(\rho(x)=0) \iff (x=\Theta)$ (Θ — нуль пространства X); в) $\rho(-x)=\rho(x)$; (c) $\rho(\alpha x+\beta y) \leqslant \rho(x)+\rho(y)$ $(x,y \in X,\ \alpha,\beta \geqslant 0,\ \alpha+\beta=1)$. Если условие (c) заменить на (c1) $\rho(\alpha x+\beta y) \leqslant \alpha\rho(x)+\beta\rho(y)$ $(x,y \in X,\ \alpha,\beta \geqslant 0,\ \alpha+\beta=1)$, то модуляр называется *выпуклым.* Если условие (c) заменить на (c2) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x)+\rho(y)$ $(x,y \in X)$, то модуляр называется *вогнутым.*

Видно, что в общем случае модуляр не обязан быть полуаддитивным, тем не менее, из условия (c) следует, что для любого модуляра выполняется неравенство: (c3) $\rho(x+y) \leqslant \rho(2x)+\rho(2y)$ $(x,y \in X)$.

О п р е д е л е н и е 2. Если ρ — модуляр, то множество $X_\rho = \{x \in X\colon \lim_{\lambda\to 0}\rho(\lambda x)=0\}$ называется *модулярным пространством.*

Для модуляра ρ в X_ρ можно определить F-квазинорму по формуле $\|x\|_\rho = \inf\{t>0\colon \rho(x/t) \leqslant t\}$. Если модуляр ρ выпуклый, то в X_ρ можно определить норму по формуле $\|x\|_\rho = \inf\{t>0\colon \rho(x/t) \leqslant 1\}$.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность $\{x_n\}$ элементов из модулярного пространства X_ρ называется: 1) ρ*-сходящейся* к элементу x, если $\rho(x-x_n) \to 0$ при $n \to +\infty$; 2) ρ*-фундаментальной*, если $\rho(x_m-x_n) \to 0$ при $m,n \to +\infty$.

О п р е д е л е н и е 4. Модулярное пространство X_ρ называется ρ*-полным*, если в нем любая ρ-фундаментальная последовательность является ρ-сходящейся.

О п р е д е л е н и е 5. Подмножество B пространства X_ρ называется ρ*-замкнутым*, если из того, что последовательность $\{x_n\} \subset B$ ρ-сходится к элементу x, следует, что $x \in B$. Будем обозначать $\overline{B}^\rho$ замыкание B в смысле ρ-сходимости.

О п р е д е л е н и е 6. Подмножество B пространства X_ρ называется ρ*-ограниченным*, если $\delta_\rho(B) = \sup_{x,y\in B}\rho(x-y) < +\infty$, величина $\delta_\rho(B)$ называется ρ*-диаметром* B.

О п р е д е л е н и е 7. Будем говорить, что модуляр ρ обладает *свойством Фату*, если $\rho(x-y) \leqslant \lim\inf\{x_n-y_n\}$ всякий раз, когда $x_n \xrightarrow{\rho} x$ и $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

О п р е д е л е н и е 8. Будем говорить, что модуляр ρ удовлетворяет Δ_2*-условию*, если $\rho(2x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ всякий раз, когда $\rho(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы о неподвижной точке нам понадобится следующий факт.

Теорема 1. *Пусть* X_ρ *— полное модулярное пространство,* $\{F_n\}$ *— убывающая последовательность таких непустых* ρ *-замкнутых подмножеств пространства* X_ρ, *что* $\delta_\rho(F_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *тогда* $\cap_n F_n$ *сходится в одну точку.*

Доказательство данного утверждения проводится аналогично доказательству известной теоремы Кантора для полных метрических пространств с той лишь разницей, что в рассуждениях метрика заменяется модуляром.

Теорема 2 (о неподвижной точке в вогнутом модулярном пространстве). *Пусть* X_ρ *— полное модулярное пространство,* ρ *— вогнутый модуляр, обладающий свойством Фату. Пусть* B *—* ρ *-замкнутое подмножество пространства* X_ρ *. Предположим, что отображение* $T: B \to B$ *является сжимающим, т. е. существует такое* $k \in [0,1)$, *что* $\rho(Tx - Ty) \leqslant k\rho(x-y)$ *для любых* $x, y \in B$ *. Тогда у отображения* T *существует неподвижная точка* $Tx_0 = x_0$ *.*

Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — такая убывающая последовательность положительных чисел, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Рассмотрим множества $M_{\varepsilon_n} = \{x \in B\colon \rho(x - Tx) \leqslant \varepsilon_n\}$. Покажем, что последовательность $\{M_{\varepsilon_n}\}$ обладает следующими 4-мя свойствами.

1) $M_{\varepsilon_n} \neq \varnothing$ *для любого* n *.*

Без ограничения общности можно полагать, что существует такой элемент $x \in B$, что $\rho(x - Tx) < +\infty$, тогда для любго $p \in \mathbf{N}$ имеем: $\rho(T^{p+1}x - T^p x) \leqslant k\rho(T^p x - T^{p-1}x) \leqslant k^2\rho(T^{p-1}x - T^{p-2}x) \leqslant \cdots \leqslant k^p\rho(Tx - x)$. Так как $k < 1$, то $\rho(T^{p+1}x - T^p x) \to 0$ при $p \to +\infty$. Следовательно, найдется такое $q \in \mathbf{N}$, что $\rho(T^{q+1}x - T^q x) \leqslant \varepsilon_n$. Тогда $y = T^q x \in M_{\varepsilon_n}$.

2) M_{ε_n} *—* ρ *-замкнуто.*

Пусть $\{x_\rho\}$ — последовательность в M_{ε_n} . Предположим, что $\{x_\rho\}$ ρ -сходится к $x \in X_\rho$. Поскольку $\{x_\rho\} \subset B$, а B ρ -замкнуто, то $x \in B$.

С одной стороны, $\rho(x_p - x) \to 0$ при $p \to +\infty$, а с другой стороны, $\rho(Tx_p - Tx) \leqslant k\rho(x_p - x)$, следовательно, $\rho(Tx_p - Tx) \to 0$ при $p \to +\infty$. По свойству Фату получаем $\rho(Tx - x) \leqslant \liminf \rho(Tx_p - x_p) \leqslant \varepsilon_n$. Значит, $x \in M_{\varepsilon_n}$ и, следовательно, M_{ε_n} ρ -замкнуто.

3) $\delta_\rho(M_{\varepsilon_n}) \to 0$ *при* $n \to +\infty$ *.*

Пусть $x, y \in M_{\varepsilon_n}$, тогда имеем $\rho(x - y) = \rho(x - Tx + Tx - Ty + Ty - y) \leqslant \rho(x - Tx) + \rho(Tx - Ty) + \rho(Ty - y) \leqslant 2\varepsilon_n + k\rho(x - y)$, откуда $\rho(x - y) \leqslant 2\varepsilon_n/(1-k)$. Таким образом, $\delta_\rho(M_{\varepsilon_n}) = \sup_{y \in M_{\varepsilon_n}} \rho(x - y) \leqslant 2\varepsilon_n/(1-k)$.

Но $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$, следовательно, $\delta_\rho(M_{\varepsilon_n}) \to 0$ при $n \to +\infty$.

4) $\{M_{\varepsilon_n}\}$ *— убывающая последовательность.*

Утверждение следует из того факта, что $\{\varepsilon_n\}$ — убывающая последовательность.

Таким образом, для последовательности $\{M_{\varepsilon_n}\}$ выполнены все условия теоремы 1, а, значит, $\cap_n M_{\varepsilon_n} = \{x_0\}$. Но $x_0 \in M_{\varepsilon_n}$ для всех n , следовательно, $\rho(x_0 - Tx_0) \leqslant \varepsilon_n \to 0$ при $n \to +\infty$, а, значит, $Tx_0 = x_0$.