ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

Г. Ю. Е р м о л е н к о, **А. Г. Е р м о л е н к о**, **М. Л. С т е п а н о в а** (Самара, СамГУПС). **Свойства тригонометрических многочленов наилучшего приближения.**

Данное сообщение посвящено изучению основных свойств тригонометрических многочленов наилучшего приближения, подобных свойствам преобразования Фурье и позволяющих использовать их вместо преобразования Фурье в численных расчетах. Везде в дальнейшем рассматриваемые функции относятся к пространству $L_2[-l,l]$ функций с суммируемым квадратом на отрезке $[-l,l]$. Тригонометрические многочлены $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\pi nx/l}$, где $c_n = (2l)^{-1}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\pi nx/l}dx$, сходятся к $f(x)$ в среднем квадратичном, т. е. в метрике пространства $L_2[-l,l]$. Продолжим периодически рассматриваемые функции на всю оставшуюся числовую ось и воспользуемся свойством периодических функций. Тогда получим $c_n = (2l)^{-1}\int_{a}^{a+2l} f(x)e^{-i\pi nx/l}dx$. Здесь a — любое действительное число.

Введем генерирующую функцию с помощью соотношения:

$$\gamma(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\pi xt/l}dt. \tag{1}$$

Из (1) видно, что коэффициенты тригонометрического многочлена c_n являются значениями генерирующей функции, т. е. $c_n = \gamma(x=n)$. В этом случае тригонометрический многочлен функции $f(x)$ приобретает вид $\sum_{n=-N}^{N}\gamma(x=n)e^{i\pi nx/l}$, где $\gamma(x)$ определена в (1).

С в о й с т в о 1. **Теорема** (о сдвиге). *Сдвиг аргумента функции на величину α приводит к умножению ее генерирующей функции на $e^{i\pi n\alpha/l}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим генерирующую функцию $\gamma(x)^* = (2l)^{-1}$ $\int_0^{2l} f(\alpha+t)\ \ e^{-i\pi xt/l}dt$. Выполним замену переменных по формуле $\alpha+t=\tau$. Получим $\gamma(x)^* = (2l)^{-1}\int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(\tau)e^{-i\pi n(\tau-\alpha)/l}d\tau$, или $\gamma(x)^* = e^{i\pi n\alpha/l}\gamma(x)$.

С в о й с т в о 2. **Теорема** (подобия). Как известно, теорема подобия устанавливает связь между Фурье-образами функций $f(x)$ и $f(\alpha x)$, где α — действительная константа. В случае тригонометрических многочленов для генерирующей функции будем иметь $\gamma(x)^* = (2l/\alpha)^{-1}\int_0^{2l/\alpha} f(\alpha t)e^{-i\pi xy/l}dt$. После замены переменных $\alpha t = \tau$ получим

$$\gamma(x)^* = \frac{1}{2l}\int_a^{2l} f(\tau)e^{-i\pi xt/(l\alpha)}d\tau, \tag{2}$$

или $\gamma(x)^* = \gamma(x/\alpha)$.

С в о й с т в о 3. Исследуем связь между тригонометрическими многочленами исходной функции и ее производной. Установим связь между их генерирующими функциями. Для генерирующей функции производной имеем $\gamma(x)^* = (2l)^{-1}\int_0^{2l} f'(t)e^{-i\pi xt/l}dt$. Вычисляя интеграл в правой части соотношения (2) с помощью формулы дифференцирования произведения функций, получим $\gamma(x)^* =$

$(2l)^{-1}[f(2l) - f(0)] + i\pi x\gamma(x)/l$. Из последнего соотношения следует, что на величину коэффициента тригонометрического многочлена производной исходной функции оказывают влияние ее граничные значения. Это существенно отличает тригонометрические многочлены от преобразования Фурье.

Свойство 4. **Теорема** (о свертке). В нашем случае свертку $f(x)$ периодических с периодом $2l$ функций $u(x)$ и $v(x)$ определим следующим соотношением: $f(x) = \int_{-l}^{l} u(t)v(x-t)\,dt$.

Теорема. *Пусть функциям* $f(x)$, $u(x)$ *и* (x) *поставлены в соответствие их генерирующие функции* $\gamma_f(x)$, $\gamma_u(x)$, $\gamma_v(x)$. *Тогда справедливо соотношение* $\gamma_f(x) = 2l\gamma_u(x)\gamma_v(x)$.

Доказательство. Вычислим генерирующую функцию

$$\gamma_f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} e^{-i\pi xt/l}\left[\int_{-l}^{l} u(\tau)v(t-\tau)\,d\tau\right] dt.$$

Вводя в последнем интеграле новую переменную $z = t - \tau$, получим

$$\gamma_f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} u(\tau)e^{-i\pi x\tau/l}\left[\int_{-l}^{l} v(z)e^{-i\pi xz/l}\,dz\right] d\tau,$$

или $\gamma_f(x) = 2l\gamma_u(x)\gamma_v(x)$.

Свойство 5. **Теорема** (о дифференцировании генерирующей функции). *Умножение функции* $f(x)$ *на* $-i\pi t/l$ *приводит к дифференцированию ее генерирующей функции.*

Доказательство. Вычислим генерирующую функцию для $(-i\pi t/l)f(x)$:

$$\gamma_1(x) = (2l)^{-1}\int_{-l}^{l}(-i\pi t/l)f(t)e^{-i\pi xt/l}dt = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-i\pi xt/l}\right],$$

или $\gamma_1(x) = d\gamma(x)/dx$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ермоленко Г. Ю.* Метод опорных функций для решения статических и динамических задач линейной анизотропной теории упругости. — Известия вузов. Машиностроение, 2003, № 1.