ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

А. Д. М а р к о в с к и й (Москва, МГУЛ). **Вычислительные базисы для основных числовых систем.**

Понятие вычислительных базисов, аддитивных и мультипликативных, возникло как основа «мультипликативного метода вычислений» [1]. Оно обобщает и редуцирует свойства позиционных систем счисления, открывает возможности для систематизации представлений чисел и элементов алгебраических систем, а, самое главное, для общей классификации и оптимизации вычислительных алгоритмов.

О п р е д е л е н и е. Пусть K — топологическое ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Не более, чем счетное множество $B = \{b(\beta) \in K \,|\, \beta \in B\}$, B — индексное множество, называется *аддитивным* или *мультипликативным вычислительным базисом* на множестве $D \subset K$, если для любого $x \in D$ существует $n \in \{1, 2, \dots, +\infty\}$, существуют такие отображение $j\colon \{1, 2, \dots, n\} \to B$ и отображение $s\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{-1, 1\}$, что $x = \sum_{k=1}^{n} s(k)b(j(k))$ или $x = \prod_{k=1}^{n} b^{s(k)}(j(k))$.

Аддитивное или мультипликативное представление элемента x называется *натуральным*, если $s(k) = 1$ для любого $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Вычислительный базис B называется *натуральным на* D, если любой элемент x из D имеет натуральное представление. Вычислительный базис B называется *базисом конечных представлений на* D*, если любое представление каждого элемента* x *из* D *конечно, т. е.* $n \neq +\infty$.

Множество всех элементов кольца K*, представимых в вычислительном базисе* B*, называется оболочкой* B*. Два вычислительных базиса считаются эквивалентными, если у них одинаковые оболочки.*

Теорема 1. *Каждый аддитивный или мультипликативный вычислительный базис* $B \subset K$ *может быть расширен до эквивалентного ему натурального базиса* B^+ *или* B' *согласно формулам* $B^+ = (-B) \cup B$ *или* $B' = B^{-1} \cup B$*, где* $-B$ *и* B^{-1} *— множества всех элементов, противоположных и обратных к элементам* B*.*

Отображения $(\,)^+ \colon 2^K \to 2^K$ *и* $(\,)' \colon 2^K \to 2^K$*, при условии* $\varnothing^+ = \varnothing$*,* $(\varnothing)' = \varnothing$*, являются операторами замыкания и порождают в кольце* K *неотделимую топологию.*

Теорема 2. *Для того чтобы множество* $B \subset \mathbf{Z}$ *было аддитивным вычислительным базисом на кольце* $\mathbf{Z}$ *целых чисел, необходимо и достаточно, чтобы оно не принадлежало собственному идеалу кольца* $\mathbf{Z}$*.*

Множество $B \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ *является натуральным аддитивным базисом на множестве натуральных чисел* $\mathbf{N}$ *тогда и только тогда, когда* $1 \in B$*.*

Множество $B \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ *является натуральным мультипликативным базисом на* $\mathbf{N}$ *тогда и только тогда, когда оно содержит все простые числа и единицу.*

Теорема 3. *Пусть для любого простого* p Q_p *— поле* p*-адических чисел с топологией, индуцированной неархимедовой* p*-нормой,* $Z_p \subset Q_p$ *— кольцо целых* p*-адических чисел.*

Для того чтобы множество $B \subset Z_p$ *было аддитивным натуральным базисом на кольце* Z_p, *необходимо и достаточно, чтобы одно содержало хотя бы одну* p*-адическую единицу.*

Для того чтобы множество $B \subset Q_p$ *было аддитивным вычислительным базисом на поле* Q_p, *необходимо и достаточно, чтобы ноль являлся предельной точкой множества* $B^{-1} \subset Q_p$.

Теорема 4. *Пусть топология поля* Q *рациональных чисел индуцирована неархимедовыми нормами. Тогда множество* $B \subset Q$ *является аддитивным вычислительным базисом на поле* Q *тогда и только тогда, когда ноль является предельной точкой множества* B^{-1} *при любой неархимедовой норме* (p*-норме*) *на* Q .

При неархимедовых нормированиях любой аддитивный вычислительный базис на Q *есть базис конечных представлений.*

Теорема 5. *Пусть топология поля* Q *естественна, т. е. индуцирована архимедовой нормой. Тогда также существуют базисы конечных представлений на* Q .

Для того чтобы множество $B \subset Q$ *было аддитивным вычислительным базисом на* Q, *достаточно, чтобы ноль служил предельной точкой для* Q.

Для того чтобы множество $B \subset Q$ *было мультипликативным вычислительным базисом на* Q, *достаточно, чтобы оно включало множества простых чисел и* $\{-1, 0, 1\}$.

Теорема 6. *На множестве действительных чисел* $\mathbf{R}$ *не существует вычислительных базисов конечных представлений.*

Множество $B \subset \mathbf{R}$ *является аддитивным вычислительным базисом на* $\mathbf{R}$ *тогда и только тогда, когда оно имеет ноль своей предельной точкой.*

Множество $B \subset \mathbf{R}$ *является аддитивным натуральным базисом тогда и только тогда, когда оно имеет ноль своей предельной точкой и содержит числа разных знаков.*

Множество $B \subset \mathbf{R}$ *является мультипликативным вычислительным базисом на* $\mathbf{R}$ *тогда и только тогда, когда оно имеет единицу своей предельной точкой и содержит числа разных знаков.*

Точку ноль из пространства $\mathbf{R}^n$, т. е. $0 \in \mathbf{R}^n$, будем называть *невырожденной предельной точкой множества* $B \subset \mathbf{R}^n$, если любая ее окрестность содержит n линейно независимых векторов, принадлежащих B .

Теорема 7. *Множество* $B \subset \mathbf{R}^n$ *является аддитивным вычислительным базисом в* $\mathbf{R}^n$ *тогда и только тогда, когда ноль — невырожденная предельная точка* B .

Если $B(\mathbf{R}) = \{b(j) \in \mathbf{R} \,|\, j \in \mathbf{N}\}$ *— произвольный аддитивный вычислительный базис в* $\mathbf{R}$, *то* $B^n(\mathbf{R})$ *— аддитивный вычислительный базис в* R^n .

Пусть $K_a := \{x + yi \,|\, x \in \mathbf{R},\, y \in \mathbf{R},\, i^2 = a\}$ так, что при $a = -1$ $(i^2 = -1)$ $K_a = K_{-1} = \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел; при $a = 0$ $(i^2 = 0)$ $K_a = K_0$ — кольцо дуальных чисел; при $a = 1$ $(i^2 = 1)$ $K_a = K_1$ — кольцо двойных чисел.

Определим подмножество $H_a := \{1 + s_1 b(j_1) + s_2 b(j_2) \in K_a \,|\, (s_1, s_2, j_1, j_2) \in \{-1, 1\}^2 \times \mathbf{N}^2$, $(b(j_1), b(j_2)) \in B^2(\mathbf{R})$, $i^2 = a\} \subset K$, где $a \in \{-1, 0, 1\}$.

Теорема 8. *Множество* $H_{-1} \subset K_{-1}$ *является мультипликативным вычислительным базисом на поле* $\mathbf{C}$ *комплексных чисел.*

Теорема 9. *Множество* $H_0 \cup \{-1, i\}$, *где* $i^2 = 0$, *является мультипликативным вычислительным базисом на кольце* K_0 *дуальных чисел.*

Теорема 10. *Множество* $H_1 \cup \{-1, 1, i\}$, *где* $i^2 = 1$, *является мультипликативным вычислительным базисом на кольце* K_2 *двойных чисел.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марковский А. Д.*, *Меликов Г. Г.* Мультипликативные алгоритмы типовых вычислений и организация устройств на их основе. — Научные труды МЛТИ, 1989, в. 217, с. 5–23.