О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 3
2012

М. Д. М и т л я н с к и й (Москва, ГСИИ). **О представлении некоторых интегралов.**

В некоторых разделах физики твердого тела приходится вычислять интегралы типа $\int_0^b (b^2-x^2)^{-1}\sin(b^2-x^2)\,dx$, а также исследовать их асимптотику при $b\to\infty$. Такие интегралы возникают, например, в задачах по теории дифракции рентгеновских лучей в кристаллах, в задачах затухания возбуждений в кристаллах со специальными видами спектра и т. п. (см., например, [1]).

В настоящей заметке получены точные формулы для следующих интегралов:

$$I_1=\int_0^b \frac{\sin a^2(b^2-x^2)}{b^2-x^2}\,dx,\quad I_2=\int_0^b \frac{\sin a^2(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx,\quad I_3=\int_0^b \frac{\cos a^2(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx \tag{1}$$

с параметрами $a,b>0$. Несмотря на простой внешний вид, эти интегралы отсутствуют в известных справочниках и таблицах интегралов, в частности, в [2, 3].

Ниже будут выведены следующие представления для интегралов (1):

$$I_1=\frac{\pi}{2b}[C^2(ab)+S^2(ab)],\quad I_2=\frac{\pi}{2b}[C^2(ab)-S^2(ab)],\quad I_3=\frac{\pi}{4b}[1-4C(ab)S(ab)], \tag{2}$$

где $C(x)=\sqrt{2/\pi}\int_0^x\cos t^2\,dt$, $S(x)=\sqrt{2/\pi}\int_0^x\sin t^2\,dt$ — интегралы Френеля. Далее будет использоваться следующая модификация интегралов Френеля:

$$C_1(x)=\int_0^x t^{-1/2}\cos t\,dt=\sqrt{2\pi}\,C(\sqrt{x}),\quad S_1(x)=\int_0^x t^{-1/2}\sin t\,dt=\sqrt{2\pi}\,S(\sqrt{x}).$$

Для доказательства первой формулы в (2) приведем интеграл I_1 заменой переменной к виду

$$I_1=\frac{1}{2b}\int_0^1\frac{\sin\theta^2 x}{x\sqrt{1-x}}\,dx,\quad \theta=ab \tag{3}$$

и воспользуемся соотношением $x^{-1}\sin cx=\int_0^c\cos tx\,dt$.

Имеем далее:

$$\begin{aligned}
2bI_1 &= \int_0^1(1-x)^{-1/2}\,dx\int_0^{\theta^2}\cos tx\,dt=\int_0^{\theta^2}dt\int_0^1 x^{-1/2}\cos t(1-x)\,dx\\
&= \int_0^{\theta^2}\left(\cos t\int_0^1 x^{-1/2}\cos tx\,dx+\sin t\int_0^1 x^{-1/2}\sin tx\,dx\right)dt\\
&= \int_0^{\theta^2}\left(t^{-1/2}\cos t\int_0^t x^{-1/2}\cos x\,dx+t^{-1/2}\sin t\int_0^t x^{-1/2}\sin x\,dx\right)dt\\
&= \int_0^{\theta^2}[C_1'(t)C_1(t)+S_1'(t)S_1(t)]\,dt=\frac12\int_0^{\theta^2}d[C_1^2(t)+S_1^2(t)]\\
&= \frac12[C_1^2(\theta^2)+S_1^2(\theta^2)]=\pi[C^2(\theta)+S^2(\theta)].
\end{aligned} \tag{4}$$

Интеграл I_2 сводится к

$$I_2 = \frac{1}{2b}\int_1^2 \frac{\sin\theta^2 x}{x\sqrt{x-1}}\,dx, \quad \theta = ab,$$

и далее, аналогично выкладкам (4), имеем:

$$\begin{aligned} 2bI_2 &= \int_1^2 (x-1)^{-1/2}\,dx \int_0^{\theta^2} \cos tx\,dt = \int_0^{\theta^2} dt \int_0^1 x^{-1/2}\cos t(1+x)\,dx \\ &= \int_0^{\theta^2} \left(t^{-1/2}\cos t \int_0^t x^{-1/2}\cos x\,dx - t^{-1/2}\sin t\int_0^t x^{-1/2}\sin x\,dx \right) dt \\ &= \int_0^{\theta^2} [C_1'(t)C_1(t) - S_1'(t)S_1(t)]\,dt = \pi[C^2(\theta) - S^2(\theta)]. \end{aligned}$$

Для интеграла I_3 имеем

$$I_3 = \int_0^b \frac{dx}{b^2+x^2} - \int_0^b \frac{1-\cos a^2(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4b} - \widehat{I}_3.$$

Используя соотношение $x^{-1}(1-\cos cx) = \int_0^c \sin tx\,dt$, аналогично проделанному выше получаем:

$$\begin{aligned} 2b\widehat{I}_3 &= \int_1^2 x^{-1}(x-1)^{-1/2}(1-\cos\theta^2 x)\,dx = \int_1^2 (x-1)^{-1/2}\,dx \int_0^{\theta^2} \sin tx\,dt \\ &= \int_0^{\theta^2} dt \int_0^1 x^{-1/2}\sin t(1+x)\,dx = \int_0^{\theta^2} \left(t^{-1/2}\sin t\int_0^t x^{-1/2}\cos x\,dx \right. \\ &\quad \left. + t^{-1/2}\cos t \int_0^t x^{-1/2}\sin x\,dx \right) dt = \int_0^{\theta^2} d[C_1(t)S_1(t)] = 2\pi C(\theta)S(\theta). \end{aligned}$$

Тем самым представления (2) доказаны.

Сделаем в заключение несколько замечаний.

1. Используя вторую и третью формулы в (2) и выражения степеней $\sin x$, $\cos x$ через функции кратных аргументов (см., например, [2, с. 39–40]), можно получить точные выражения для интегралов

$$\int_0^b \frac{\sin^n a^2(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx, \quad \int_0^b \frac{\cos^n a^2(b^2+x^2)}{b^2+x^2}\,dx \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

2. Из представлений (2) и известной асимптотики для интегралов Френеля (см., например, [2, с. 946]) легко выводятся асимптотические формулы: при $ab \to \infty$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\pi}{4b} + \frac{\sqrt{\pi}}{2ab^2}\sin(a^2b^2 - \pi/4) + O\left(a^{-2}b^{-3}\right), \\ I_2 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2ab^2}\sin(a^2b^2 + \pi/4) + O\left(a^{-2}b^{-3}\right), \\ I_3 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2ab^2}\cos(a^2b^2 + \pi/4) + O\left(a^{-2}b^{-3}\right). \end{aligned}$$

3. Отметим, что в формуле 3.768.5 из [2, с. 438] для интеграла $\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}\sin ax\,dx$, к которому сводится I_1 (см. формулу (3)), допущена неточность: вместо условия $\operatorname{Re}\nu > -1$ должно быть $\operatorname{Re}\nu > 0$ (сравните с формулой 3.768.11).

Автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А. Д. Сластникову за полезные замечания и помощь при оформлении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вакс В. Г.* Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. М.: Наука, 1973, 328 с.
2. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 1100 с.
3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами./ Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979, 832 с.