ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2012

А.Н. Тырсин, О.В. Ворфоломеева (Екатеринбург, НИЦ «НиР БСМ» УрО РАН, Челябинск, ЧелГУ). **Оценивание изменения энтропии многомерных стохастических систем.**

Будем считать, что стохастическая система S может быть представлена в виде многомерной случайной величины $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, каждая компонента Y_i которой характеризует функционирование соответствующего элемента исследуемой системы. Случайные величины Y_i могут быть как взаимозависимыми, так и не зависеть друг от друга.

Теорема. *Пусть X_1, X_2 — две непрерывные случайные величины, определенные на всей числовой оси и описываемые однотипными законами распределения с плотностями $f_1(x) = f(x;\mu_1,\lambda_1)$ и $f_2(x) = f(x;\mu_2,\lambda_2)$ соответственно, где $\mu_1,\mu_2,\lambda_1,\lambda_2$ — параметры положения и масштаба случайных величин X_1 и X_2. Тогда разность дифференциальных энтропий случайных величин X_1 и X_2 равна*

$$H(X_2) - H(X_1) = \ln\frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \qquad (1)$$

Доказательство. Выразим плотность вероятности случайной величины X_2 через плотность вероятности случайной величины X_1: $f(x;\mu_2,\lambda_2) = Lf(t;\mu_1,\lambda_1)$, где $L \equiv \lambda_1/\lambda_2$, $t \equiv L(x+\mu_2-\mu_1)$. С учетом этого разность дифференциальных энтропий случайных величин X_1 и X_2 равна

$$\begin{aligned} H(X_2) - H(X_1) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu_2,\lambda_2)\ln f(x;\mu_2,\lambda_2)\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu_1,\lambda_1)\ln f(x;\mu_1,\lambda_1)\,dx = -L\int_{-\infty}^{+\infty} f(t;\mu_1,\lambda_1)\ln[Lf(t;\mu_1,\lambda_1)]\,dx \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu_1,\lambda_1)\ln f(x;\mu_1,\lambda_1)\,dx = -\ln L\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu_2,\lambda_2)\,dx \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} f(t;\mu_1,\lambda_1)\ln f(t;\mu_1,\lambda_1)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu_1,\lambda_1)\ln f(x;\mu_1,\lambda_1)dx. \end{aligned}$$

Отсюда имеем $H(X_2) - H(X_1) = -\ln L + H(X_1) - H(X_1) = -\ln L$.

Следствие. *Пусть в условиях теоремы X_1 и X_2 — две непрерывные симметричные случайные величины, имеющие конечные дисперсии. Поскольку среднее квадратическое отклонение непрерывной симметричной случайной величины, если оно существует, пропорционально параметру масштаба, формулу (1) можно записать в виде*

$$H(X_2) - H(X_1) = \ln\frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \qquad (2)$$

где σ_1, σ_2 – средние квадратические отклонения случайных величин X_1 и X_2.

Пусть имеем систему случайных величин $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$, изменяющуюся во времени, причем законы распределения случайных величин имеют параметры положения и масштаба. Совместная дифференциальная энтропия системы случайных величин, согласно свойству иерархической аддитивности, равна [1]

$$H(\mathbf{Y}) = H(Y_1) + H(Y_2|Y_1) + H(Y_3|Y_1Y_2) + \cdots + H(Y_m|Y_1Y_2\cdots Y_{m-1}). \qquad (3)$$

Рассмотрим k-й и $(k+1)$-й моменты времени. Им соответствуют случайные векторы $\mathbf{Y}^{(k)} = (Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_m^{(k)})$ и $\mathbf{Y}^{(k+1)} = (Y_1^{(k+1)}, Y_2^{(k+1)}, \ldots, Y_m^{(k+1)})$. Считаем, что тип закона распределения каждой из случайных величин не изменился. Тогда изменение энтропии с учетом формул (2), (3) равно

$$\begin{aligned}\Delta H &= H(\mathbf{Y}^{(k+1)}) - H(\mathbf{Y}^{(k)}) = H(Y_1^{(k+1)}) - H(Y_1^{(k)}) + H(Y_2^{(k+1)}|Y_1^{(k+1)}) \\ &\quad - H(Y_2^{(k)}|Y_1^{(k)}) + \cdots + H(Y_m^{(k+1)}|Y_1^{(k+1)}\cdots Y_{m-1}^{(k+1)}) - H(Y_m^{(k)}|Y_1^{(k)}\cdots Y_{m-1}^{(k)}) \\ &= \ln\frac{\sigma_{Y_1^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_1^{(k)}}} + \ln\frac{\sigma_{Y_2^{(k+1)}|Y_1^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_2^{(k)}|Y_1^{(k)}}} + \ln\frac{\sigma_{Y_3^{(k+1)}/Y_1^{(k+1)}Y_2^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_3^{(k)}|Y_1^{(k)}Y_2^{(k)}}} \\ &\qquad + \cdots + \ln\frac{\sigma_{Y_m^{(k+1)}|Y_1^{(k+1)}\cdots Y_{m-1}^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_m^{(k)}|Y_1^{(k)}\cdots Y_{m-1}^{(k)}}},\end{aligned}$$

где $\sigma_{Y_l^{(j)}/Y_1^{(j)}\cdots Y_{l-1}^{(j)}} = \sigma_{Y_l^{(j)}}(1 - R^2_{Y_l^{(j)}|Y_1^{(j)}\cdots Y_{l-1}^{(j)}})^{1/2}$, $R^2_{Y_l^{(j)}|Y_1^{(j)}\cdots Y_{l-1}^{(j)}}$ — коэффициенты детерминации соответствующих регрессионных зависимостей, $l = 2, 3, \ldots, m$, $j = k, k+1$. Отсюда получим

$$\triangle H = \triangle H_\Sigma + \triangle H_\mathbf{R} = \sum_{l=1}^{m} \ln\frac{\sigma_{Y_l^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_l^{(k)}}} + \frac{1}{2}\sum_{l=2}^{m}\ln\frac{1 - R^2_{Y_l^{(k+1)}|Y_1^{(k+1)}\cdots Y_{l-1}^{(k+1)}}}{1 - R^2_{Y_l^{(k)}|Y_1^{(k)}\cdots Y_{l-1}^{(k)}}}, \qquad (4)$$

где $\triangle H_\Sigma$, $\triangle H_\mathbf{R}$ — приращения энтропии за счет изменений дисперсий и корреляций случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Формула (4) показывает, что изменение энтропии происходит аддитивным образом, с одной стороны, за счет изменения дисперсий, а, с другой стороны, из-за изменения коррелированности случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$.

Если случайный вектор $\mathbf{Y}$ является гауссовским, то получим рассмотренный в [2] частный случай

$$\triangle H = \sum_{l=1}^{m}\ln\frac{\sigma_{Y_l^{(k+1)}}}{\sigma_{Y_l^{(k)}}} + \frac{1}{2}\ln\frac{|\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(k+1)}}|}{|\mathbf{R}_{\mathbf{Y}^{(k)}}|}, \qquad (5)$$

где $|\mathbf{R}_\mathbf{Y}|$ — определитель корреляционной матрицы $\mathbf{R}_\mathbf{Y}$ случайного вектора $\mathbf{Y}$.

Таким образом, получили формулы (4), (5) для расчета изменения энтропии. На основе соотношений (4)–(5) можно осуществлять мониторинг состояния стохастической системы путем анализа изменения ее энтропии.

Работа выполнена в рамках проекта 12-М-127-2049 фундаментальных исследований УрО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стратонович Р. Л.* Теория информации. М.: Советское радио, 1975, 424 с.
2. *Тырсин А. Н.*, *Соколова И. С.* Энтропийно-вероятностное моделирование гауссовских стохастических систем. — Матем. моделирование, 2012, т. 24, № 1, с. 88–102.