О Б О З Р Е Н И Е
П Р И К Л А Д Н О Й И П Р О М Ы Ш Л Е Н Н О Й
Т о м 19 М А Т Е М А Т И К И В ы п у с к 4
2012

Е. Г. Гольштейн, У. Х. Малков, Н. А. Соколов (Москва, ЦЭМИ РАН). **Вычислительный опыт решения биматричных игр.**

Пусть биматричная игра (т. е. конечная бескоалиционная игра двух лиц, в которой каждый игрок имеет конечное множество стратегий) определена $m\times n$-матрицами $A=\{a_{ij}\}$ и $B=\{b_{ij}\}$. У этой игры функции выигрышей игроков

$$f_1(x,y)=xAy^T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j,\quad f_2(x,y)=xBy^T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_iy_j,$$

множества стратегий игроков, соответственно,

$$X=\Bigl\{x=\ (x_1,x_2,\dots,x_m)\in\mathbf{R}_m^+\colon\ \sum_{i=1}^{m}x_i=1\Bigr\},$$
$$Y=\Bigl\{y=\ (y_1,y_2,\dots,y_n)\in\mathbf{R}_n^+\colon\ \sum_{j=1}^{n}y_j=1\Bigr\}.$$

Множество $Z^*=\{(x^*,y^*)\}$ точек Нэша биматричной игры всегда непусто. Но биматричная игра (в отличие от подкласса матричных игр) не обладает так называемой выпуклой структурой, поэтому ее множество точек Нэша может состоять из нескольких изолированных точек, что делает очень сложной задачу нахождения достаточно хорошего приближения к множеству Z^*. В качестве меры близости точки $z=(x,y)\in Z=X\times Y$ к множеству Z^* можно использовать функцию Нэша

$$N(z)=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}b_{ij}y_j-x(A+B)y^T,\quad z\in Z,$$

которая неотрицательна на Z и обращается в нуль только при $z\in Z^*$. Таким образом, поиск точек Нэша сводится к задаче отыскания глобального минимума функции $N(z)$ на Z. Эту задачу можно записать в виде

$$\widetilde{N}(x,y,u,v)=u+v-xAy^T-xBy^T\to\min,\ (x,y,u,v)\in Z\times\mathbf{R}_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\leqslant u,\ \ 1\leqslant i\leqslant m,\quad \sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i\leqslant v,\ \ 1\leqslant j\leqslant n.$$

Опишем итерационный процесс поиска локального минимума функции $\widetilde{N}$, начиная с произвольной точки, скажем, $y^0\in Y$. На k-й итерации найдем оптимальный план x^k задачи линейного программирования относительно переменных x,v

$$x(A+B)y^T-v\to\max,\ \ \sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i\leqslant v,\ \ 1\leqslant j\leqslant n,\ \ x\in X,\ \ v\in\mathbf{R},$$

при фиксированном $y = y^{k-1}$, затем — оптимальный план y^k задачи линейного программирования относительно переменных y, u

$$x(A+B)y^T - u \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant u, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad y \in Y, \quad u \in \mathbf{R},$$

при фиксированном $x = x^k$. Вычислим $N^k = N(x^k, y^k)$ и $\Delta_k = N^{k-1} - N^k$, где $k = 1, 2, \ldots,$ $N^0 = \infty$. Процесс заканчивается, если изменение функции Нэша становится менее наперед заданного положительного числа ($\Delta_k < \delta$) или если достигнуто заранее заданное количество итераций ($k = K_{\max}$). В противном случае $k := k+1$ и процесс продолжается с точки y^k.

Итерационный процесс, начинающийся с произвольной точки $x^0 \in X$, устроен аналогичным образом.

Выбирая различные начала ($x^0 \in X$ или $y^0 \in Y$), можно получить различные «минимальные» значения функции Нэша. Будем говорить, что биматричная игра решена с заранее заданной точностью $\varepsilon > 0$, если для некоторой пары $(\overline{x}, \overline{y}) \in Z$, имеет место $N(\overline{x}, \overline{y}) < \varepsilon$. Вместо функции Нэша для оценки близости точки $z \in Z$ к Z^* можно использовать ее модификацию

$$\overline{N}(z) = \max\left\{ \frac{\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i - xAy^T}{\max\{1, |xAy^T|\}}, \frac{\max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j - xBy^T}{\max\{1, |xBy^T|\}} \right\}.$$

Для проверки эффективности алгоритма был проведен вычислительный эксперимент. Для каждого из 15 наборов пар $n, m \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$, $n \leqslant m$, было предложено 100 вариантов матриц A и B: их элементы независимо генерировались при помощи датчика случайных чисел в диапазоне (0, 1). Для 15 наборов больших задач ($n, m \in \{200, 400, 600, 800, 1000\}$, $n \leqslant m$) количество вариантов уменьшено до 10. Значения констант: $K_{\max} = 30$, $\delta = 10^{-8}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

Для каждого из вариантов предложено в качестве начальных точек выбирать сначала чистые стратегии 1-го игрока, затем, если нужно, чистые стратегии 2-го игрока. Если за $m+n$ проб приближенное решение биматричной игры не получено, то далее случайным образом строилось некоторое (заранее фиксированное) количество смешанных стратегий x и/или y.

В докладе, представленном данным сообщением, будут приведены результаты вычислительного эксперимента. Все задачи были решены с заданной точностью, причем в подавляющем числе вариантов было достаточно нескольких испытаний чистых стратегий 1-го игрока. Использование смешанных стратегий было крайне редким.

Возможно, полученные результаты существенно зависят от способа формирования матриц A и B. Численное исследование алгоритма и поиск трудных задач предполагается продолжить.