ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Расчет справедливой цены в стратегиях, основанных на опционах, для модели (B,S)-рынка со случайным переключением параметров.**

Рассмотрим модель, представленную следующими стохастическими разностными уравнениями [1]:

$$\Delta S_n = S_{n-1}(r_n + \sigma_n \varepsilon_n), \quad \Delta B_n = B_{n-1} r_n, \qquad n = 1, 2, \dots, \widehat{N}. \tag{1}$$

Заданы начальные условия: $B_n|_{n=0} = B_0$, $S_n|_{n=0} = S_0$. Считаем, что случайные величины $\sigma_n > 0$, r_n предсказуемы. В данном случае $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ — независимые с. в., причем $\mathbf{P}\{\varepsilon_n = 1\} = \mathbf{P}\{\varepsilon_n = -1\}$. Рассматривается естественная фильтрация $F_0 = \sigma(\Omega, \varnothing)$, $F_n = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Пусть необходимо решить следующую задачу: найти

$$\min_{\gamma} \widehat{X}_0 \tag{2}$$

при ограничениях $\Delta(\widehat{X}_n / B_n) = \gamma_n \Delta(S_n / B_n)$, $\widehat{X}_{\widehat{N}} \geqslant f_{\widehat{N}}$, $\widehat{X}$ — адаптированный процесс, γ — предсказуемый процесс относительно фильтрации F.

Рассмотрим последовательность таких марковских моментов остановки $0 = \tau_0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \dots \leqslant \tau_N \leqslant \widehat{N}$, что

$$\tau_1 = \inf_{0 \leqslant i \leqslant \widehat{N}} \{S_i \geqslant M_1(i)\}, \quad \tau_2 = \inf_{0 \leqslant i \leqslant \widehat{N}} \{S_i \geqslant M_0(i)\}, \tag{3}$$

и так далее до τ_N. Параметры модели (1) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \widehat{\sigma}_1 \, \mathbf{I}_{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i-1},\, i \text{ — четное}} + \widehat{\sigma}_2 \, \mathbf{I}_{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i-1},\, i \text{ — нечетное}}, \\ r_n &= \widehat{r}_1 \, \mathbf{I}_{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i-1},\, i \text{ — четное}} + \widehat{r}_2 \, \mathbf{I}_{\tau_i \leqslant n-1 < \tau_{i-1},\, i \text{ — нечетное}}, \end{aligned} \tag{4}$$

$n = 1, 2, \dots, \widehat{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$, $\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{r}_1, \widehat{r}_2$ — константы.

Теорема [1]. *Пусть* $\widehat{X}_{\widehat{N}} = f_{\widehat{N}}(S_{\widehat{N}}) \equiv g_{\widehat{N}}(S_{\widehat{N}})$. *Тогда*

$$\widehat{X}_{n-1} = g_{n-1} S_{n-1} = \begin{cases} C_0^1(g_n(S_{n-1}C_1^1) + g_n(S_{n-1}C_2^1)), & \tau_i \leqslant n-1 \leqslant \tau_{i+1},\ i \text{ — \textit{четное}}, \\ C_0^2(g_n(S_{n-1}C_1^2) + g_n(S_{n-1}C_2^2)), & \tau_i \leqslant n-1 \leqslant \tau_{i+1},\ i \text{ — \textit{нечетное}}, \end{cases} \tag{5}$$

$n = 1, 2, \dots, \widehat{N}$, $i = 0, 1, \dots, N$, $C_0^k = (2(1+\widehat{r}_k))^{-1}$, $C_1^k = 1 + \widehat{r}_k + \widehat{\sigma}_k$, $C_2^k = 1 + \widehat{r}_k - \widehat{\sigma}_k$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим следующие финансовые обязательства [2].

Стрэддл – комбинация опционов-колл и опционов-пут на одни и те же акции с одинаковыми ценами исполнения KK и временем исполнения N. Для этой комбинации функция выигрыша–проигрыша покупателя определяется формулой

$$V^{(1)}(S_n) = |S_N - K| - C_N,$$

где K — контрактная цена, C_N — справедливая цена опциона-колл.

Стрэнгл – комбинация опционов-колл и опционов-пут с одной и той же датой исполнения N, но разными ценами исполнения K_1 и K_2. Функция может быть записана в следующей форме:

$$V^{(2)}(S_N) = |S_N - K_2|\,\mathbf{I}\{S_N > K_2\} + |S_N - K_1|\,\mathbf{I}\{S_N < K_1\} - C_N.$$

Стрэп – комбинация из одного опциона-пут и двух опционов-колл с одной и той же датой исполнения N, но разными ценами исполнения K_1 и K_2. Если $K_1 = K_2 = K$, то функция

$$V^{(3)}(S_N) = 2|S_N - K|\,\mathbf{I}\{S_N > K\} + |S_N - K|\,\mathbf{I}\{S_N < K\} - C_N.$$

Стрип — комбинация из одного опциона-колл и двух опционов-пут с одинаковыми датами исполнения N, но разными ценами исполнения K_1 и K_2. Соответствующая функция имеет вид

$$V^{(4)}(S_N) = |S_N - K_2|\,\mathbf{I}\{S_N - K_2\} + 2|S_N - K_1|\,\mathbf{I}\{S_N < K_1\} - C_N.$$

Спрэд «быка» – стратегия, состоящая из покупки опциона-колл с ценой исполнения K_1 и продажи опциона-колл с ценой исполнения K_2. В этом случае

$$V^{(5)}(S_N) = |K_2 - K_1|\,\mathbf{I}\{S_N \geqslant K_2\} + |S_N - K_1\,\mathbf{I}\{K_1 < S_N < K_2\} - C_N.$$

Спрэд «медведя» – стратегия, состоящая из продажи опциона-колл с ценой исполнения K_1 и покупки опциона-колл с более высокой ценой исполнения $K_2 > K_1$. Для этой комбинации

$$V^{(6)}(S_N) = -|K_2 - K_1|\,\mathbf{I}\{S_n \geqslant K_2\} + |S_N - K_1|\,\mathbf{I}\{K_1 < S_n \leqslant K_2\} + C_N.$$

Пусть начальные данные имеют вид $S_0 = 6$, $B_0 = 1$, $K_1 = 3$, $K_2 = 4$, $M_0 = 5$, $M_1 = 7$, $\widehat{N} = 10$, $\widehat{r}_1 = 0,01$, $\widehat{r}_2 = 0,02$, $\widehat{\sigma}_1 = 0,03$, $\widehat{\sigma}_2 = 0,04$, $C_N = 3,36$. Тогда $C_N^{(1)} = 0,41$, $C_N^{(2)} = 0,44$, $C_N^{(3)} = 3,78$, $C_N^{(4)} = 0,34$, $C_N^{(5)} = 2,1$, $C_N^{(6)} = 2,2$. При этом заметим, что при расширении «коридора» $[M_0, M_1]$ справедливые цены сходятся к значениям, вычисленным без изменения параметров, т. е. к значениям $\widetilde{C}_N^{(1)} = 0,25$, $\widetilde{C}_N^{(2)} = 0,63$, $\widetilde{C}_N^{(3)} = 3,54$, $\widetilde{C}_N^{(4)} = 0,55$, $\widetilde{C}_N^{(5)} = 2,12$, $\widetilde{C}_N^{(6)} = 2,15$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белявский Г. И.*, *Данилова Н. В.*, *Кондратьева Т. Н.* Расчеты для общей бинарной модели (B, S)-рынка. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 982–993.
2. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 2004, т. 1, 2.