ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

С. М. Бычкова, А. А. Жарких (Мурманск, МГТУ). **Исследование сходимости рядов, представляющих начальные моменты евклидовых расстояний между упорядоченными копиями множества точек плоскости, когда одна из копий подвергается случайному повороту.**

В работах [1, 2] исследовались вероятностные распределения евклидовых расстояний между упорядоченными копиями множества точек плоскости, когда одна из копий подвергается случайному повороту или отражению. Был сформулирован ряд теорем о виде плотностей распределений указанных расстояний. Также были сформулированы несколько теорем о виде начальных моментов таких евклидовых расстояний. Для вычисления начальных моментов в этих теоремах неявно использовалось почленное интегрирование конечных и бесконечных рядов. Во всех случаях было показано, что четные начальные моменты исследуемых расстояний представляются в виде конечной суммы, а нечетные — в виде бесконечного числового ряда. В работе, представленной данным сообщением, показана сходимость полученного в $[1,2]$ числового ряда, соответствующего случаю, когда множество точек разбивается на два произвольных подмножества, каждое из которых независимо поворачивается на случайный угол.

Теорема. *Пусть имеется упорядоченное конечное множество точек плоскости* $\{A_i(x_i,y_i)\}$, $i=1,2,\ldots,N$. *Это множество разбивается на два произвольных подмножества с сохранением упорядоченности в каждом из них. Каждое из подмножеств подвергается случайному преобразованию поворота. Одно подмножество поворачивается относительно фиксированной точки* (x_{01},y_{01}) *на случайный угол* φ_1, *распределенный равномерно в полуинтервале* $[0,2\pi)$. *Второе подмножество поворачивается относительно фиксированной точки* (x_{02},y_{02}) *на случайный угол* φ_2, *распределенный равномерно в полуинтервале* $[0,2\pi)$. *Тогда начальные моменты евклидова расстояния* d *между исходным множеством точек и множеством точек, полученным в результате преобразования поворота, вычисляются по формулам: для четных* k $(k=2n)$

$$\overline{d}^k = Q^n \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{n!}{(n-2r)!\,Q^{2r}2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{((r-s)!)^2(s!)^2} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2}\right)^{2r-2s} \left(\frac{d^2_{\max 2}}{2}\right)^{2s},$$

для нечетных k $(k=2n+1)$

$$\overline{d}^k = Q^{n+1/2}\sum_{r=0}^{\infty} Q^{-2r}2^{-2r} \prod_{c=0}^{2r-1} \left(n+c-2r+\frac{3}{2}\right)\sum_{s=0}^{r} \frac{1}{((r-s)!)^2(s!)^2} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2}\right)^{2r-2s}\left(\frac{d^2_{\max 2}}{2}\right)^{2s},$$

$$Q=\frac{d^2_{\max 1}+d^2_{\max 2}}{2},\;\; d_{\max k}=2\sqrt{\sum_{k=1}^{N_k}(x_{ik}-x_{0k})^2+(y_{ik}-y_{0k})^2},\;\; k=1,2,\;\; N_1+N_2=N.$$

Доказательство этой теоремы приведено в работе [1].

Ниже исследуется сходимость числового ряда, представляющего нечетные начальные моменты евклидова расстояния d. Для этого данный бесконечный ряд представим в следующем виде:

$$\overline{d}^{2n+1} = Q^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+1/2)!}{(n-2r+1/2)!2^{2r}} \sum_{s=0}^{r} \frac{1}{((r-s)!)^2(s!)^2} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2Q}\right)^{2r-2s} \left(\frac{d^2_{\max 2}}{2Q}\right)^{2s}. \quad (1)$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{s=0}^{r} \frac{1}{((r-s)!)^2(s!)^2} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2Q}\right)^{2r-2s} \left(\frac{d^2_{\max 2}}{2Q}\right)^{2s} \leqslant \left(\sum_{s=0}^{r} \frac{1}{((r-s)!\, s!} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2Q}\right)^{r-s} \left(\frac{d^2_{\max 2}}{2Q}\right)^{s}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(r!)^2} \left(\frac{d^2_{\max 1}}{2Q} + \frac{d^2_{\max 2}}{2Q}\right)^{2r} = \frac{1}{(r!)^2}. \quad (2)$$

Учитывая (2), мажорантный ряд для ряда (1) можно представить в следующем виде:

$$Q^{n+1/2} \sum_{r=0}^{\infty} a_r, \quad \text{где} \quad a_r = \frac{(n+1/2)!}{(n-2r+1/2)!\, 2^{2r}(r!)^2}.$$

Поскольку $\lim_{r\to\infty}\{r(a_r/a_{r+1}-1)\} = n+2 > 1$, мажорантный ряд (3) сходится по признаку Раабе. Следовательно, и ряд (1), представляющий нечетные начальные моменты евклидова расстояния d, сходится.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жарких А. А.*, *Бычкова С. М.* Исследование распределений евклидовых расстояний между упорядоченными множествами точек плоскости при случайных поворотах и отражениях. — Вестник МГТУ, 2010, т. 13, № 3, с. 592–606.
2. *Zharkikh A. A.*, *Bychkova S. M.* Strong theorems on the form of probability distributions of Euclidean distances between an ordered sets of points in the plane upon random rotations or reflections of their subsets. — Pattern Recognition and Image Analysis, 2011, v. 21, № 2, p. 215–218.
3. *Архипов Г. И.*, *Садовничий В. А.*, *Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. /Под ред. В. А. Садовничего. М.: Высшая школа, 1999, 695 с.