ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

Е. Н. Жидков (Москва, МГТУ). **О решении обратной задачи нелинейной теплопроводности методом линеаризации.**

Рассматривается **задача цементации стали.** Для создания необходимой концентрации углерода по глубине образца требуется подобрать процесс насыщения так, чтобы обеспечить это условие.

Математическая модель процесса описывается системой

$$\begin{gathered} u_t = (uu_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ -u_x(0,t) = k(t)/[u(0,t)]^\delta, \quad u(0,l) = u_0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = u_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $u(x,t)$ – концентрация углерода в точке x в момент времени t, u_0 — положительная постоянная, $k(t)$ — кусочно постоянная функция, $k(t) = k_i = \text{const} \geqslant 0$ при $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \equiv T$.

Постановка обратной задачи. Пусть известна функция $u(x,T) = \varphi(x)$. Требуется найти кусочно постоянную функцию $r(t) = r_i = \text{const} \geqslant 0$ при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = T_1$.

В работе [1] предложен вариант решения поставленной задачи. В ряде случаев функция $k(t)$ мала. Это позволяет упростить решение, использовав метод линеаризации. Сформулируем задачу:

$$\begin{gathered} u_t = (uu_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ -u_x(0,t) = \varepsilon k(t)/[u(0,t)]^\delta, \quad u(0,l) = u_0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ u(x,0) = u_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < \varepsilon << 1. \end{gathered} \tag{2}$$

Представим решение задачи (2) в виде

$$u = u^0(x,t) + \varepsilon u^1(x,t) + O\,(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Подставим (3) в (2):

$$\begin{aligned} & u_t^0(x,t) + \varepsilon u_t^1(x,t) + O\,(\varepsilon^2) = [(u^0(x,t) + \varepsilon u^1(x,t) + O\,(\varepsilon^2)) \\ & \qquad \times (u_x^0(x,t) + \varepsilon u_x^1(x,t) + O\,(\varepsilon^2))]_x, 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \\ & -[u_x^0(0,t) + \varepsilon u_x^1(0,t) + O\,(\varepsilon^2)] = \varepsilon k(t)/[u^0(x,t) + \varepsilon u^1(x,t) + O\,(\varepsilon^2)]^\delta, \\ & u^0(l,t) + \varepsilon u^1(l,t) + O\,(\varepsilon^2) = u_0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ & u^0(x,0) + \varepsilon u^1(x,0) + O\,(\varepsilon^2) = u_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned} \tag{4}$$

Удерживая в (4) члены не выше первого порядка, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} & u_t^0(x,t) = (u^0(x,t) u_x^0(x,t))_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \\ & u_x^0(0,t) = 0, \quad u^0(l,t) = u_0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u^0(x,0) = u_0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{aligned} \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&u^1_x(x,t) = [u^0(x,t)u^0_x(x,t)]_x + [u^0_x(x,t)u^1(x,t)]_x, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,\\
&-u^1_x(0,t) = k(t)/[u^0(0,t)]^\delta, \quad u^1(l,t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u^1(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Очевидно, что решением задачи (5) является функция $u^0(x,t) = u_0$. Подставив это решение в (6), получим систему

$$
\begin{aligned}
&u^1_x(x,t) = u_0 u^1_{xx}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,\\
&-u^1_x(0,t) = k(t)/[u_0]^\delta, \quad u^1(l,t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \quad u^1(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Обозначим $\Phi(x-\xi, t-\tau)$ фундаментальное решение задачи (7). С его помощью запишем решение задачи (7):

$$
u^1(x,t) = \frac{1}{u_0^\delta} \int_0^t \Phi(x, t-\tau) k(\tau)\, d\tau. \tag{8}
$$

Подставляя в (8) $t = T$, получим интегральное уравнение I-го рода для неизвестной функции $k(t)$:

$$
\varphi(x) = \frac{1}{u_0^\delta} \int_0^T \Phi(x, T-\tau) k(\tau)\, d\tau,
$$

которое решаем методом регуляризации [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидков Е. Н.* О восстановлении краевого условия. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 4.
2. *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.