ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 19 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2012

Э. Ф. Хайретдинов (Москва, НИИМ МГУ). **Асимптотические решения уравнений пограничного слоя — 2.**

Данное сообщение — уточнение и развитие результатов [1]. Уравнение установившегося ламинарного плоско–параллельного течения несжимаемой вязкой жидкости в ПС (пограничном слое) в обозначениях [1]: $\psi_y = \psi_1 = u$, $\psi_x = \psi' = -v$, $\psi_2 = u_y$, $\psi_3 = u_{yy}$, представляются в виде

$$\psi_1\psi_1' + \psi'\psi_2 = VV'(x) + \psi_3. \tag{1}$$

Здесь $V(x) = \lim_{y\to\infty} u(x,y)$ — значение параметра u на внешней границе ПС — наперед заданная аналитическая функция: $V = c_\alpha x^\alpha$ $(\alpha = 0, 1, 2, \dots,\ c_0 = 0,\ c_1 = k,\ c_2 = 0,\ V(0) = V''(0) = 0,\ V'(0) = k > 0,\ 0 \leqslant x < 1:\ V'(x) > 0,\ V(1) = 1,\ V'(1) = 0,\ x > 1:\ V > 0,\ V'(x) < 0$). Решение уравнения (1) должно удовлетворять граничным условиям

$$u = 0, \quad u_1 = \omega(x) \quad \text{при} \quad y = 0. \tag{2}$$

Функция $\omega(x)$ подбирается так, чтобы выполнялось равенство $\int_0^\infty u_1\,dy = V(x)$.

Общее решение уравнения (1) представляется в виде

$$\psi(x,y) = V(x)F(x,y), \tag{3}$$

где функция $F(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$F_{yyy} = V'(x)(F_y^2 - 1 - FF_{yy}) + V(x)(F_yF_{xy} - F_xF_{yy}) \tag{3.1}$$

и граничным условиям

$$F(x,0) = F_y(x,0) = 0, \quad F_y(x,\infty) = 1. \tag{3.2}$$

Аналитическое решение уравнения (3.1) представляется функциональным рядом [2]

$$F(x,y) = f_\alpha(y)x^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots, \tag{3.3}$$

в котором функция $f_0(y)$ удовлетворяет о. д. у. (обыкновенному дифференциальному уравнению) 3-го порядка

$$f_0'''(y) = k(f_0')^2 - 1 - f_0f_0'' \tag{3.4}$$

и краевым условиям

$$f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = 1, \tag{3.5}$$

$f_1 \equiv 0$, функции $f_j(y)$ $(j > 1)$ удовлетворяют некоторой системе о. д. у. и краевым условиям

$$f_j(0) = f_j'(0) = f_j'(\infty) = 0. \tag{3.6}$$

Решение краевых задач приводится к решению задачи Коши

$$f_i(0) = f_i'(0) = 0, \quad f_i''(0) = \varphi_i \quad (i \geqslant 0). \tag{4}$$

При этом $F_{yy}(x,0) = \varphi_\alpha x^\alpha$, $\varphi_1 = 0$. При значениях $x = O(1)$ ряд (3.3) сходится медленно и не дает возможности с удовлетворительной точностью рассчитать параметры, характеризующие течение в ПС. Но в малой окрестности начальной точки ПС: $0 \leqslant x \leqslant x_1$ $(x_1 \ll 1)$, он сходится быстро и позволяет с достаточной точностью вычислить параметры течения в этой области. В частности, с достаточной точностью может быть вычислена функция $\omega(x) = V(x)F_{yy}(x,0)$ в виде $\omega = \gamma_\alpha x^\alpha$ $(\gamma_\alpha = c_{\alpha-\beta}\varphi_\beta$, $\gamma_0 = \gamma_2 = 0)$, так что $\omega'(0) = \gamma_1$, $\omega''(0) = 0$, $\omega'''(0) = 6\gamma_3$, $\omega''''(0) = 24\gamma_4$, $\omega(x_1) = \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_1^3 + \gamma_4 x_1^4$. Рассматривая величину $\omega(x) = \mathring{u}_1(x) = u_1(x,0)$ как известную, можно из уравнения (1) и граничных условий (2) «вычислить» величины $\mathring{u}_i = u_i(x,0)$: $\mathring{u}_2 = -VV'(x)$, $\mathring{u}_3 = 0$, $\mathring{u}_4 = \omega\omega'(x)$, $\mathring{u}_5 = -2\omega(VV')'$, $\mathring{u}_6 = 2VV'(VV')'$, $\mathring{u}_7 = 4\omega^2\omega'' - \omega\{\omega'\}^2, \ldots$. Составим сумму

$$u_1^{(n)} = e^{-y}(b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \cdots + b_{n-1}y^{n-1}) \quad (n > 3), \tag{5}$$

коэффициенты b_i которой определяются формулами

$$\begin{gathered} b_i = \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i} \mathrm{C}_i^j \mathring{u}_{j+1} \quad (\mathrm{C}_i^j = i!/(j!\,(i-j)!), \\ b_0 = \mathring{u}_1 = \omega, \quad b_1 = \mathring{u}_1 + \mathring{u}_2 = \omega - VV', \quad 2b_2 = \mathring{u}_1 + 2\mathring{u}_2 + \mathring{u}_3 = \omega - 2hVV', \ldots \end{gathered} \tag{5.1}$$

Так как $(\partial^i u_1/\partial y^i)_{y=0} = \mathring{u}_{i+1}$ $(i \geqslant 0)$, сумма (5) представляет собой асимптотическое разложение функции $u_1(x,y)$ (см. [3, с. 320–329]: $\lim_{n\to\infty} u_1^{(n)} \sim u_1(x,y)$, легитимное в полуинтервале $[0,x_1)$, в котором непрерывны множители $\beta_j(x)$.

Поскольку $\int_0^\infty u_1\,dy = u|_0^\infty = V(x)$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty u_1^{(n)}(x,y)\,dy = V(x)$. При $n < \infty$

$$\int_0^\infty u_1^{(n)}(x,y)\,dy = V(x)(1 - \theta_n(x)) \quad (\theta_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty). \tag{6}$$

Функцию $\theta_n(x)$ представим в виде $e^{-n^2x^2}(\mu_0 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3)$. Условие $\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$ при этом удовлетворяется. Так как $\int u_1^{(n)}\,dy = \sum_i i!\,b_i = \sum_{j=1}^n \mathrm{C}_n^j \mathring{u}_j$, при известной функции $\theta_n(x)$ (коэффициенты μ_i определяются с помощью равенства (6) из условий $\omega'(0) = \gamma_1$, $\omega''(0) = 0$, $\omega'''(0) = 6\gamma_3$, $\omega''''(0) = 24\gamma_4$, равенство (6) представляет собой о. д. у. относительно функции $\omega(x)$.

При $n = 3,,4,5$ уравнение (6) имеет первый, при $n = 6$ — второй порядок. При $n = 5$ оно представляется в виде

$$6\omega - 15VV' + 15\omega\omega' - 12\omega(VV')' + 2VV'(VV')' = V(1 - \theta_5(x)), \tag{6.1}$$

где $\theta_5(x) = e^{-25x^2}(\mu_0 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3)$.

Начальное условие при интегрировании уравнения (6.1) задается в виде $\omega(0,01) = 0,01\gamma_1 + 0,0001\gamma_3 + 0,000001\gamma_4$.

Работа поддержана РФФИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайретдинов Э. Ф.* Асимптотические решения уравнений пограничного слоя. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 2, с. 264–266.
2. *Хайретдинов Э. Ф.* Новый подход к решению задачи о течении в пограничном слое. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 724–726.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948, 860 с.